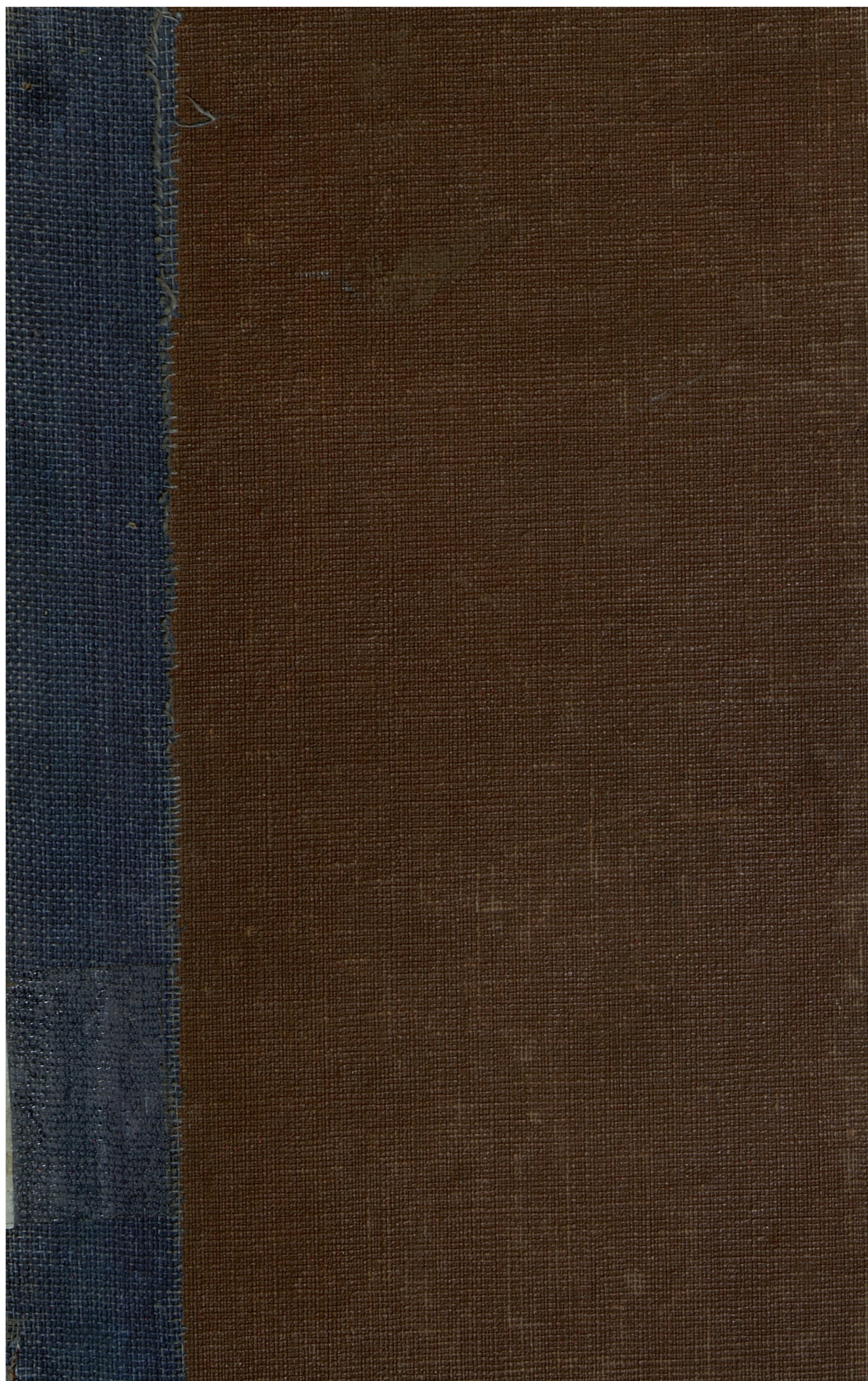


தமிழ் வெளியீட்டுக் கழக வரிசை எண்—160

கணிதம்—ஓர் அறிமுகம் - I

(புகுமுக வகுப்பிற்குரியது)

ஆசிரியர்
ர. மகாதேவன், எம்.ஏ.,
கணிதப் பேராசிரியர்,
மாநிலக் கல்லூரி, சென்னை.



தமிழ் வெளியீட்டுக் கழகம்
தமிழக அரசு

First Edition—July, 1968

B.T.P. No. 160

Mathematics for P.U.C.

R. Mahadevan

Price Rs. 4-75

Printed by
THE IDEAL PRINTERS,
MADRAS-6

அணிந்துரை

(திரு. இரா. நெடுஞ்செழியன், தமிழகக் கல்வி-தொழில் அமைச்சர்)

தமிழைக் கல்லூரிக் கல்வி மொழியாக ஆக்கி ஏழு ஆண்டுகள் ஆகிவிட்டன. தொடக்கத்தில் இருந்த இடர்ப்பாடுகள் மெல்ல மெல்ல மறைந்து வருகின்றன. நாடு முழுதும் பரந்துள்ள மாணவர்களின் ஆர்வம், 'தமிழிலேயே கற்பிப்போம்' என முன் வந்துள்ள கல்வி ஆசிரியர்களின் ஊக்கம், பிற பல துறைகளிலும் தொண்டு செய்வோர் இதற்கெனத் தந்த உழைப்பு, தங்கள் சிறப்புத் துறைகளில் நூல்கள் எழுதித் தர முன்வந்த நூலாசிரியர்கள் தொண்டுணர்ச்சி, இவற்றின் காரணமாக இத் திட்டம் நம்மிடையே மகிழ்ச்சியும், மனநிறைவும் தரத்தக்க வகையில் நடைபெற்று வருகிறது.

பல துறைகளில் பணிபுரியும் பேராசிரியர்கள் எத்தனையோ நெருக்கடிகளுக்கிடையே குறுகிய காலத்தில் அரிய முறையில் நூல்கள் எழுதித் தந்துள்ளனர்.

வரலாறு, அரசியல், உளவியல், பொருளாதாரம், புவியியல், வேதியியல், உயிரியல், வானியல், புள்ளியியல், தத்துவம் ஆகிய பல துறைகளில் தனி நூல்கள், மொழிபெயர்ப்பு நூல்கள் என்ற இருவகையிலும் தமிழ் வெளியீட்டுக் கழகம் நூல்களை வெளியிட்டு வருகிறது.

இவற்றுள் ஒன்றான 'கணிதம்—ஓர் அறிமுகம்-1' என்ற இந் நூல் தமிழ் வெளியீட்டுக் கழகத்தின் 160ஆவது வெளியீடாகும். கல்லூரித் தமிழ்க் குழுவின் சார்பில் வெளியான 35 நூல்களையும் சேர்த்து இதுவரை 195 நூல்கள் வெளிவந்துள்ளன.

கணக்கிலடங்காத் தடைகளை எல்லாம் அகற்றித் தமிழன்னை கல்லூரிக் கலை மண்டபத்தில் கொலு வீற்றிருக்கிறாள். எனவே, இவ்வன்னையை வாழ்த்துவோமாக! உழைப்பின் வாரா உறுதிகள் இல்லை; ஆதலின், உழைத்து வெற்றி காண்போம். தமிழைப் பயிலும் மாணவர்கள் உலக மாணவர்களிடையே சிறந்த இடம் பெறவேண்டும்; அதுவே தமிழன்னையின் குறிக்கோளுமாகும். சென்னைப் பல்கலைக் கழகத்தின் பலவகை உதவிகளுக்கும் ஒத்துழைப்புக்கும் நம் மனம் கலந்த நன்றி உரித்தாகுக.

இரா. நெடுஞ்செழியன்

பொருளடக்கம்

1. சார்பலன்களும் மீதித் தேற்றமும்

1·1. சார்பலன் குறியீட்டு முறை (Functional notation): ஒரு வட்டத்தின் ஆரம் r அலகுகள் என்றால் அதன் பரப்பு πr^2 ச. அலகுகளாகும் என அறிவோம். பரப்பை A என்று குறித்தால் $A = \pi r^2$ என வருகிறது. Aயின் மதிப்பு 'r' இன் மதிப்பைச் சார்ந்து நிற்கிறது. A எனும் ராசி 'r' எனும் ராசியின் **சார்பலன்** (function) எனப்படுகிறது. கணிதக் குறியீட்டில் பரப்பு $f(r)$ எனப்படுகிறது. இதை function r எனப் படிக்க வேண்டும்.

$y = 5x^2 - 2x + 5$ என்றால் yஇன் மதிப்பு xஇன் மதிப்பைச் சார்ந்து நிற்கிறது. ஆகவே, அது ஒரு $f(x)$ ஆகும்.

$f(x) \equiv 5x^2 - 2x + 5$ என்றால் $f(a)$ என்பதன் பொருள் xக்கு 'a' எனப் பிரதியிட வரும் மதிப்பு எனப் பொருளாகும்.

$f(2) = 5 \cdot 2^2 - 2 \cdot 2 + 5 = 21$

$f(0) = 5 \cdot 0 - 2 \cdot 0 + 5 = 5$ ஆகும்.

இங்கு x என்பது மாறி (variable) எனப்படும். $5x^2 - 2x + 5$ என்பது ஒரு மாறி கொண்ட xஇன் சார்பலன் எனப்படும்.

பயிற்சி 1

1. $f(x) \equiv 3x^2 - 4x + 5$ என்றால்
$(i)\, f(1)$, $(ii)\, f(-2)$, $(iii)\, f(2)$, $(iv)\, f(0)$
இவற்றின் மதிப்பைக் காணவும்.

2. $f(x) \equiv x^3 - 2x + 1$ என்றால்
$(i)\ 2f(0)$ $(ii)\ 5f(-3)$ $(iii)\ \frac{1}{5}f(2)$ இவற்றின் மதிப்பு என்ன ?

3. $f(x) \equiv 2x^3 - x^2 + 3x + 1$ என்றால்
(i) $f(2) - f(1)$ (ii) $f(a) + f(-a)$ இவற்றின் மதிப்பு என்ன ?

4. $f(a) = a^2$ என்றால் $f(a+1) - f(a-1) = 4a$ எனக் காட்டு.

5. $f(m) = m^2 - 1$ என்றால் $f(m+h) - f(m)$ இன் மதிப்பு என்ன ?

6. $f(t) = \dfrac{2t}{t^2 - 1}$ என்றால் $f(x) + f\left(\dfrac{1}{x}\right) = 0$ எனக் காட்டு.

1·2. ஒன்றுக்கு மேற்பட்ட மாறிகளில் சார்பலன் : 'r' அலகு ஆரமுள்ள வட்டத்தைக் குறுக்கு வெட்டாகவும் h அலகு நீளமுள்ள உருளையின் கனபரிமாணம் $\pi r^2 h$ என அறிவோம். இங்கு கனபரிமாணம் (கொள்ளளவு) r, h என்ற இரு மாறிகளைச் சார்ந்து நிற்கிறது.

$a^2(b-c) + b^2(c-a) + c^2(a-b)$ என்ற கோவையின் மதிப்பு a, b, c என்ற ராசிகளின் மதிப்பைச் சார்ந்து நிற்கிறது. இதைத் தனித் தனியே aயின் சார்பலன், bயின் சார்பலன், cயின் சார்பலன் என்றும் கூறலாம் ; (a, b, c) என்ற மூன்று மாறிகள் கொண்ட சார்பலன் எனவும் கூறலாம்.

1·3. முழு அடுக்குக் கோவை (Integral function) : ராசியின் அடுக்குகள் நேர்முழு எண்களாக வருமிடத்து அவை முழு எண் அடுக்குக் கோவை, அல்லது முழு எண் அடுக்குச் சார்பலன் எனப்படும். $3x^2 - 2x + 5$ என்பது முழு எண் அடுக்குச் சார்பலனாகும். $2\sqrt{x} + 3x\sqrt{x} + 5$ என்பது முழு எண் அடுக்குச் சார்பலன் அல்ல. ஒரு முழு எண் அடுக்குச் சார்பலனை ஒரு ஈருறுப்புக் கோவையால் வகுத்தால் வரும் மீதி என்ன என்பதை வகுக்காமலேயே காணும் வகையைக் கூறுவோம்.

1·4. மீதித் தேற்றம் : **$f(x)$ எனும் xஇல் முழு எண் அடுக்குக் கோவை $(x-a)$ஆல் வகுத்தால் வரும் எண் மீதி $f(a)$ ஆகும்.**

தேற்றத்தின் நிரூபணம் : $f(x)$ என்பதை $(x-a)$ஆல் வகுக்க வரும் எண்மட்டும் கொண்ட மீதி R ஆகுக : ஈவு xஇன் சார்பலனாகும். அது Q (x) ஆகுக. வகுபடும் கோவை = ஈவு × வகுக்கும் கோவை + மீதி

$\therefore \quad f(x) \equiv Q(x)(x-a) + R$

இது xஇன் எல்லா மதிப்புக்களுக்கும் பொருந்தும் ஒரு முற்றொருமையாகும். xக்கு 'a' எனப் பிரதியிட, மீதி **R**ல் x இல்லாததால்

$$f(a) = Q(a) \cdot (a-a) + R$$
$$= Q(a) : O + R$$
$$= R.$$

$\therefore$ மீதி $\mathbf{R} = f(a)$

மீதித் தேற்றம் வழிக் காரணி காணல்.

$f(x)$ஐ $(x-a)$ஆல் வகுக்கவரும் மீதி $f(a)$ என மீதித் தேற்றம் கூறுகிறது. $f(a)=0$ என்றால் $f(x)$ஐ $(x-a)$ மீதியில்லாமல் வகுக்கிறது. அதாவது $f(x)$இன் ஒரு காரணி $(x-a)$ என வருகிறது.

ஆகவே $f(a) = 0$ என்றால் $f(x)$இன் ஒரு காரணி $(x-a)$ என ஒரு தேற்றம் புலனாகிறது. இதைக் 'காரணித் தேற்றம்' (Factor Theorem) எனக் கூறுவர்.

$(x-1)$ என்பது காரணியாதலின் அறிகுறி.

$f(x) \equiv ax^3+bx^2+cx+d$

$\therefore \quad f(1) = a+b+c+d$

$\therefore$ $f(x)$ என்ற கோவையில் குணகங்களும் நிலையெண்ணும் சேர்ந்து 0 ஆனால், $f(x)$ இன் காரணி $(x-1)$ எனத் தெரிகிறது.

$(x+1)$ என்பது காரணியாதல் அறிகுறி.

$f(x) = ax^3+bx^2+cx+d$ என்றால் $f(-1) = -a+b-c+d$

இது 0 ஆனால் $d+b = c+a$. ஆகவே கோவையில் இரட்டை அடுக்குக் குணகங்கள் (நிலை எண் உட்பட) சேர்ந்து ஒற்றை அடுக்குக் குணகங்களின் கூடுதலுக்குச் சமமானால் $(x+1)$ காரணியாகும்.

மாதிரி : $ax^4+2x^3+bx^2-14x+24$இன் காரணி x^2+x-12 ஆனால் a, bஇன் மதிப்புக் காணவும். கோவையை $f(x)$ எனக் குறிப்போம். $f(x) \equiv ax^4 + 2x^3 + bx^2 - 14x + 24$ $(x^2+x-12) = (x+4)(x-3)$

$\therefore \quad (x+4)$ம் $(x-3)$ம் $f(x)$இன் காரணிகள்.

$\therefore \quad f(-4) = 0 \quad f(3) = 0$

$\therefore \quad f(-4) \equiv 256a - 128 + 16b + 56 + 24 = 0.$

$\therefore \quad 256a + 16b = 48.$

$16a + \quad b = 3.$

$$f(3) \equiv 81a + 54 + 9b - 42 + 24 = 0$$

$$\begin{aligned} \therefore \quad 81a + 9b &= -36 \\ 9a + b &= -4 \\ \therefore \quad 7a &= 7 \\ \therefore \quad a &= 1 \\ b &= -13 \end{aligned}$$

மாதிரி : $ax^4 + 2x^3 + bx^2 - 12x + 18$ஐ $x^2 + x - 12$ஆல் வகுக்க மீதி $2x - 6$ என்றால் 'a' 'b'இன் மதிப்பு என்ன? கோவையிலிருந்து மீதியை நீக்கவரும் சார்பலன் $ax^4 + 2x^3 + bx^2 - 14x + 24$ இது $x^2 + x - 12$ஆல் வகுபடும். ஆகவே $a = 1$; $b = -13$ (முன் கணக்கைப் பார்க்க).

மாதிரி : $f(x)$ எனும் சார்பலனை $(x-a)\,(x-b)$ஆல் வகுக்க வரும் மீதி

$$\frac{(x-b)\, f(b) - (x-a)\, f(a)}{(a-b)} \text{ எனக் காட்டுக.}$$

வகுக்கும் கோவை இருபடிக் கோவையாதலால் மீதி ஒருபடிக் கோவையாகும். எளிதில் விடை காண மீதியை $A\,(x-a) + B\,(x-b)$ எனக் கொள்வோம். ஈவு $Q\,(x)$ ஆகுக.

$\therefore \; f(x) \equiv Q\,(x).\; (x-a)\,(x-b) + A\,(x-a) + B\,(x-b)$ இந்த முற்றொருமை xஇன் எல்லா மதிப்புக்களுக்கும் பொருந்தும். ஆகவே $x = a$; b என முறையே பிரதியிட

$$f(a) = B\,(a-b) \qquad \therefore \quad B = \frac{f(a)}{(a-b)}.$$

$$f(b) = A\,(b-a) \qquad \therefore \quad A = -\frac{f(b)}{(a-b)}$$

$$\therefore \quad \text{மீதி} = \frac{f(a)}{(a-b)}\,(x-b) - \frac{f(b)\,(x-a)}{(a-b)}$$

$$= \frac{f(a)\,(x-b) - f(b)\,(x-a)}{(a-b)}$$



பயிற்சி 2

1. வகுக்காமல் $x^3-63x+162$ இன் காரணி $(x-3)$ எனக் காட்டு.
2. ,, ,, x^3+x^2-x+2 ,, $(x+2)$,,
3. ,, ,, $2x^3-ax^2-7a^2x+2a^3$,, $(x-2a)$,,
4. $x^4+4ax^2+bx-54$ இன் காரணி x^2+x-6 என்றால் a, bயின் மதிப்பு என்ன?
5. $2x^3-(a+b)x^2-(2b-1)x+6$ இன் காரணி x^2-3x+2 என்றால் a, b இன் மதிப்பு என்ன? **(M.U.)**
6. $(a+2b)x^3-(2a-b)x^2+3ax-(2a+3b)$ யின் ஒரு காரணி $(x-1)$ என நிறுவுக. **(M.U.)**
7. 'a', 'b'யின் எந்த மதிப்புகளுக்கு x^3+ax^2+bx+3 எனும் கோவைக்கு $(x+1)$, $(x-1)$ காரணிகளாகும்.
8. $5x^3-7x^2+lx-m$ எனும் கோவையை x^2-2x-3 ஆல் மீதி இன்றி வகுக்கமுடியுமானால் l, mஇன் மதிப்பு என்ன?
9. x^5-x^3+ax+bயின் காரணி x^2+x-6 என்றால் a, bயின் மதிப்பு என்ன?
10. $(x+3)$ ஆல் வகுக்கும்போது $2x^3+bx^2-bx^2-bx-2b+1$ எனும் கோவையும் $x^3+5x^2+7x-b^2+6$ எனும் கோவையும் ஒரே மீதியைத் தருகிறது என்றால் bயின் மதிப்பைக் காண்க.
11. $ax^4+bx^3-18x^2+15x-5$ எனும் கோவையை x^2-3x+2 ஆல் வகுத்தால் மீதி $4x-7$ என்றால் a, bயின் மதிப்பு என்ன? **(M.U.)**
12. ax^3+bx+c எனும் கோவையை $(x-2)$, $(x+1)$, $(x+3)$ ஆல் வகுக்க வரும் மீதி $1, 2, -4$ என்றால் a, b, cயின் மதிப்பைக் காணவும். **(M.U.)**

1·5. கோவைகள் வகை

(1) **ஓரினக் கோவை:** கோவையில் உள்ள உறுப்புக்களின் அடுக்குகள் சமமானால் அது ஓரினக் கோவை எனப்படும். இரண்டோ, அதற்கு மேற்பட்ட மாறிகளைக் கொண்ட கோவையானால், மாறிகளின் பெருக்கற்பலனின் அடுக்கு, அவற்றின் அடுக்கின் கூடுதலாகும். x^2yஇன் அடுக்கு 3; x^2y^2zஇன் அடுக்கு 5ஆகும்.

ஓரினகக்கோவைகளின் பொது உருவங்கள்

மாறி	அடுக்கு அல்லது படி	பொது உருவம்
x	1	ax
x	2	ax^2
x, y	1	$ax+by$
x, y	2	$ax^2+bxy+cy^2$
x, y, z	1	$ax+by+cz$

(2) **சமச்சீர்க் கோவைகள்:** ஒன்றுக்கு மேற்பட்ட மாறிகள் வரும் கோவைகளில் இரண்டு மாறிகளை ஒன்றற்கொன்று மாற்றும்பொழுது கோவை மாருதிருந்தால், அந்த இரண்டு மாறிகளின் கோவை சமச்சீர்க் கோவை எனப்படும்.

மாறிகள்	அடுக்கு	பொது உருவம்
x, y	1	$a(x+y)+b$
$x\ \ y$	2	$a(^2+y^2)+bxy$ $+c(x+y)+d$
$x\ \ y$	3	முன் வரியுடன் $P(x^3+y^3)+q(x^2y+xy^2)$ என்பதைச் சேர்க்க.

(3) **ஓரினச் சமச்சீர்க் கோவைகள்** (Homogeneous symmetric functions)**:** ஒரு சமச்சீர்க் கோவை, ஓரினக் கோவையாக இருந்தால் அல்லது ஓரினக் கோவை சமச்சீர்க் கோவையாகவும் இருந்தால் அது ஓரினச் சமச்சீர்க் கோவை எனப்படும்.

மாறி	அடுக்கு	பொது உருவம்
x, y	1	$a(x+y)$
x, y	2	$a(x^2+y^2)+bxy$
a, b, e	1	$K\ (a+b+c)$
a, b, c	2	$K\ (a^2+b^2+c^2)$ $+l(ab+bc+ca)$

(4) **வட்டச் சமச்சீர்க் கோவை** (Cyclic symmetric functions)**:** கீழ்வரும் கோவையைப் பாருங்கள்.

$$f(x, y, z) \equiv x^2 (y-z) + y^2 (z-x) + z^2 (-y)$$

முதற்கண் பார்வைக்கு இது சமச்சீர்க் கோவை எனத் தோன்றும். ஆனல், xஐயும் yஐயும் மாற்றினுல் வருவது — $f(x, y, z)$ ஆகும். ஆகவே இது தனிச் சமச்சீர்க் கோவையன்று.

ஆனல், முதல் உறுப்பை எடுத்துக்கொண்டு xக்கு y எனவும், yக்கு z எனவும் zக்கு x எனவும் பிரதியிட 2வது உறுப்பு வருகிறது. 2வது உறுப்பில் இதேபோல் செய்ய மூன்ருவது உறுப்பு வருகிறது. மூன்ருவதுடன் நிறுத்திக்கொள்கிருேம். கோவை முழுவதும் மூன்று உறுப்புக்களுடன் நின்றுவிடுகிறது. தொடர்ந்து பிரதியிட முதல் உறுப்பே மீண்டும் வரும். இத்தகைய கோவை வட்டச் சமச்சீர்க் கோவை எனப் பெயர்பெறும்.

$\sum$ குறியீடு

[$\sum$ என்பதை சிக்மா (sigma) என வாசிக்கவும்]

முதல் உறுப்புத் தரப்பட்டு, மற்றிரு உறுப்புக்களை வட்டச் சமச்சீர்க் கோவையாக எழுத $\sum$ என முதல் உறுப்புக்குமுன் இடப்படும். $\sum ab$ என்ருல் $ab+bc+ca$ எனப் பொருளாகும்.

$a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$ என்று நீளமாக எழுதுவதை $\sum a^2+2\sum ab$ என எழுதினல் போதும். கீழ்வருவன குறிப்பிடத் தக்கன.

$\sum(a-b) = 0$ $\sum a(b-c) = 0$

$\sum(a^2-b^2) = 0$ இவற்றைக் கவனத்தில் வைத்துக்கொள்வது நலம்.

1·6. சில வட்டச் சமச்சீர்க் கோவைகளைக் காரணப்படுத்தல்

மாதிரி 1 $\sum a^2(b-c)$ ஐக் காரணிப்படுத்து.

$\sum a^2(b-c) = a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$ இதை aயின் சார்பலனுகக் கொள்வோம் $a=b$ எனப் பிரதியிட $f(b) \equiv b^2(b-c)+b^2(c-b)+c^2(b-b) = 0$

$\therefore$ மீதித் தேற்றத்தின்படி $(a-b)$ ஒரு காரணியாகும்.

இதுபோல $(b-c)$, $(c-a)$யும் காரணிகளே.

$\sum a^2(b-c)$ என்பது மூன்றடுக்குக் கோவையாதலினுலும் $(a-b)(b-c)(c-a)$ மூன்றடுக்காதலாலும், இனிமேல் உள்ள காரணி வெற்றெண் ஆகவேண்டும். K ஆகுக.

$\therefore$ $a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b) = K(a-b)(b-c)(c-a)$ ஆகுக.

இருபுறமும் உள்ள 'a^2b'யின் உறுப்பின் குணகங்களைச் சமன் படுத்த $1 = -K$ $\therefore$ $K = -1$

$\therefore$ $\sum \mathbf{a^2(b-c)} = \mathbf{-(a-b)(b-c)(c-a)}$

[அல்லது $a=0$; $b=1$; $c=2$ எனப் பிரதியிட $-2 = 2K$

$\therefore$ $K = -1$ எனவும் வரும்]

மாதிரி : காரணிப்படுத்துக

$(a+b+c)^4-(b+c)^4-(c+a)^4-(a+b)^4+a^4+b^4+c^4$ இதில் $a=0$ என இடுக.

கோவை $=(b+c)^4-(b+c)^4-c^4-b^4+b^4+c^4=0$

∴ மீதித் தேற்றத்தின்படி 'a' ஒரு காரணி. இதைப்போல b, cயும் காரணிகளாகும். abc மூன்றடுக்கு. ஆனால், கோவையின் அடுக்கு 4. கோவை ஓரின வட்டச் சீர்க் கோவையாதலால் அதற்கு $K(a+b+c)$ எனும் இன்னொரு காரணியும் இருக்கும்.

∴ கோவை $=K(a+b+c)\,abc$

$a=1$; $b=1$; $c=1$ எனப் பிரதியிட

$81-16-16-16+4=3K$

$36=3K \quad \therefore \quad K=12$

∴ கோவை $=12\,abc\,(a+b+c)$

மாதிரி : $\sum a^4(b-c)$ ஐக் காரணிப்படுத்துக.

கோவை $a^4(b-c)+b^4(c-a)+c^4(a-b)$ இது $f(a)$; aக்கு b எனப் பிரதியிட $f(b)=b^4(b-c)+b^4(c-b)+c^4(b-b)=0$

∴ $(a-b)$ கோவையின் காரணியாகும். இந்த மூன்று காரணிகளின் பெருக்கற் பலன் மூன்றடுக்குக் கோவையாகும். ஆனால் $\sum a^4(b-c)$ யின் அடுக்கு 5 ஆகும். அது ஓரினச்சமச் சீர்க்கோவையாதலின், இன்னொரு இரண்டடுக்கு ஓரினச்சமச் சீர்க்காரணி இருக்கவேண்டும். அது $K(a^2+b^2+c^2)\,l\,(ab+bc+ca)$ ஆகுக.

$$\therefore \sum a^4(b-c) = [K(a^2+b^2+c^2)+l(ab+bc+ca)] \times (a-b)(b-c)(c-a)$$

ஒரு Kஇன் 2ன் மதிப்புக்காண கீழ்க்கண்டபடி பிரதியிடவும்.

(i) $a=0$; $b=1$; $c=2$ $\qquad -7=5K+2l$

(ii) $a=0 \quad b=1 \quad c=-1$ $\qquad -2=4M-2l$

$\therefore \quad M=-1; \quad N=-1$

$\therefore \sum a^4(b-c)=-(a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca)(a-b)(b-c)(c-a)$



பயிற்சி 3

காரணிப்படுத்துக.

1. $\sum bc(b-c)$ 2. $\sum x(y^2-z^2)$ 3. $\sum (a-b)^3$

4. $\sum (a^2-b^2)(a+b)$ 5. $\sum a(b-c)$ 6. $\sum a^3(b-c)^3$

7. $\sum (a^2-b^2)(a+b)^2$ 8. $\sum a(b^4-c^4)$ 9. $\sum a^3(b^2-c^2)$.

10. $(a+b+c)^3-a^3-b^3-c^3$

11. $(a+b+c)(bc+ca+ab)-abc = (a+b)(b+c)(e+a)$ எனக் காட்டு.

12. $2(\sum ab)^3 - \sum a^2(b+c)^2 \equiv 2abc(a+b+c)$ எனக் காட்டு.

13. $(x+y)^5-x^5-y^5 = 5xy(x+y)(x^2+xy+y^2)$ என நிறுவுக.

14. $(a+b+c)^5-a^5-b^5+c^5 \equiv 5(a+b)(b+c)(c+a)$ $(\sum a^2+ab)$ என நிறுவுக.

15. சுருக்குக: (i) $\sum \dfrac{x^2}{(x-y)(x-z)}$ (ii) $\sum \dfrac{a^3}{(a-b)(a-c)}$

(iii) $\dfrac{(b-c)^2}{(a-b)(a-c)}$ (iv) $\sum \dfrac{(x-a)^2}{(a-b)(b-c)}$

2. விகிதசமம்

2·1. $\frac{x}{a}, \frac{y}{b}, \frac{z}{c} \ldots$ என்பவை சமவிகிதங்களானால் ஒவ்வொரு விகிதமும் $\frac{lx + my + nz + \ldots}{la + mb + nc + \ldots}$ எனும் விகிதத்திற்குச் சமமாகும்.

அதாவது

$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} = \ldots$ என்றால் ஒவ்வொரு விகிதம் $= \frac{lx + my + nz + \ldots}{la + mb + nz + \ldots}$

நிரூபணம் : ஒவ்வொரு விகிதமும் K என்றாகுக.

$$\therefore \quad \frac{x}{a} = K \qquad \therefore \quad x = aK \qquad \therefore \quad lx = Kal$$

$$\frac{y}{b} = K \qquad \therefore \quad y = bK \qquad my = Kbm$$

$$\frac{z}{c} = K \qquad \therefore \quad z = cK \qquad \therefore \quad nz = Kcn$$

$$\therefore \quad (lx + my + nz + \ldots) = K\,(la + mb + nc \;\ldots\ldots)$$

$$\therefore \quad \frac{lx + my + nz + \ldots}{la + mb + nc + \ldots} = K.$$

$\therefore$ ஆகையால் தரப்பட்டுள்ள ஒவ்வொரு விகிதமும் $\frac{lx + my + nz + \ldots}{la + mb + nz + \ldots}$ க்குச் சமமாகும்.

இதைவிடப் பொதுத் தேற்றமொன்றைக் கூறுவோம்:

$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$ என்பவை சம விகிதங்களானால் ஒவ்வொரு விகிதமும் $\sqrt[n]{\frac{Px^n + qy^n + rz^n -}{Pa^n + qb^n + ac^n -}}$ க்குச் சமமாகும்.

$$\frac{x}{a} = K \quad \therefore \quad x = ak \qquad \therefore \quad x^n = a^n k^n$$

$$\therefore \qquad Px^n = Pa^n k^n$$

இதே போல $\quad qy^n = qb^n k^n$

$$rz^n + rc^n k^n$$

$$\therefore \quad Px^n + qy^n + rz^n + \ldots = K^n [pa^n + qb^n + rc^n + \ldots]$$

$$\therefore \quad \frac{Px^n + qy^n + rz^n + \ldots}{Pa^n + qb^n + rc^n + \ldots} = K^n$$

$$\therefore \quad \sqrt[n]{\frac{Px^n + qy^n + rz^n \ldots}{Pa \;+ qb^n + rc^n \ldots}} = K$$

= ஒவ்வொரு விகிதம்.

2·2. $\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \frac{a^3}{b^3} \ldots \frac{a_n}{b_n}$ **எனும் விகிதங்கள் ஒன்றற்கொன்று சமமில்லாமலும், $b_1, b_2, b_3, \ldots b_n$ எனும் பகுதி எண்கள் நேரெண்களாகவும் ஆனால் $\frac{a_1 + a_2 + a_3 + \ldots a_n}{b_1 + b_2 + b_3 + \ldots b_n}$ எனும் விகிதம், தரப்பட்ட விகிதங் களின் மிகக் குறைந்த விகிதத்திற்கும், மிக அதிக விகிதத்திற்கும் இடையில் அமையும்.**

(*i*) தரப்பட்டுள்ள விகிதங்களுள் மிக அதிக மதிப்புள்ள விகிதம் $\frac{m}{n} = K$ ஆகுக.

$$\therefore \frac{a_1}{b_1} < K \qquad \therefore \quad a_1 < b_1 k$$

$$\frac{a_2}{b_2} < K \qquad \therefore \quad a_2 < b_2 k$$

$$\ldots \quad \ldots \qquad\qquad \ldots \quad \ldots$$

$$\frac{a_n}{b_n} < K \qquad \therefore \quad a_n < b_n k$$

$$\therefore \quad (a_1 + a_2 + a_3 \ldots a_n) < K (b_1 + b_2 + b_3 \ldots b_n)$$

$$\therefore \quad \frac{a_1 + a_2 + a_3 \ldots + a_n}{b_1 + b_2 + b_3 \ldots + b_n} < K$$

(*ii*) இதே போல மிகக் குறைந்த விகிதத்தின் மதிப்பு '*l*' என்றால்

$$\frac{a_1}{b_1} > l; \quad \frac{a_2}{b_2} > l \quad \frac{a_3}{b_3} > l \ldots \quad \frac{a_n}{b_n} > l$$

$$\therefore \quad a_1\, b_1 > l \qquad a_2 > b_2\, l \qquad a_3 > b_3 l \ldots \quad a_n > b_n\, l$$

$$\therefore \quad a_1 + a_2 + a_3 \quad + a_n > l\,(b_1 + b_2 + \quad b_n)$$

$$\therefore \quad \frac{a_1 + a_2 + a_3 \quad + a_n}{b_1 + b_2 + b_3 \quad + b_n} > l$$

குறிப்பு: b_1, b_2, b_3 .. என்பவை நேரெண்ணுனல் மட்டுமே $\frac{a_1}{b_1} > k$ என்றுல் $a_1 > b_1 k$ எனச் 'சமமின்மை' (inequality) மாருமல் வரும்; b_1 எதிரெண்ணுனல் $\frac{a_1}{b_1} > k$ என்றுல் $a_1 < b_1 k$ என வரும்.

மாதிரி: $\frac{x}{a^3(b-c)} = \frac{y}{b^3(c-a)} = \frac{z}{c^3(a-b)}$ ஆனுல்

$\frac{x+y+z}{a+b+c} = \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c}$ என நிறுவுக.

$$\frac{x}{a^3(b-c)} = \frac{y}{b^2(c-a)} = \frac{z}{c^3(a-b)}$$

$$\therefore \quad \text{ஒவ்வொரு விகிதமும்} = \frac{x+y+z}{\sum a^3(b-c)}$$

$$= \frac{(x+y+z)}{-(a+b+c)(a-b)(b-c)(c-a)}$$

அல்லது $\frac{\frac{x}{a}}{a^2(b-c)} = \frac{\frac{y}{a}}{b^2(c-a)} = \frac{\frac{z}{a}}{c^2(a-b)}$

$$\therefore \quad \text{ஒவ்வொரு விகிதம்} = \frac{\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c}}{\sum a^2(b-c)}$$

$$= \frac{\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c}}{-(a-b)(b-c)(z-c)}$$

$$\therefore \quad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = \frac{x+y+z}{a+b+c}$$

மாதிரி: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f}$ என்றுல்

$\frac{a^3}{b^2} + \frac{c^3}{d^2} + \frac{e^3}{f^2} = \frac{(a+c+e)^3}{(b+d+f)^2}$ என நிறுவுக.

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{b} = K$ ஆகுக. $\therefore$ $a=bk$; $b=dk$; $c=fk$

அப்போது $\frac{a^3}{b^2} + \frac{c^3}{d^2} + \frac{e^3}{f^2}$

$$= \frac{b^3k^3}{b^2} + \frac{d^3k^3}{d^2} + \frac{f^3k^3}{b^2} + (b+d+f)k^3$$

$$\frac{a+c+e}{b+d+f} = K \quad \therefore (a+c+e) = K(b+d+b)$$

$$\therefore \frac{(a+c+e)^3}{(b+d+f)^2} = \frac{k^3(b+d+f)^3}{(b+d+f)^2} = k^3(b+d+f)$$

$$\therefore \frac{a^3}{b^2} + \frac{c^3}{d^2} + \frac{e^3}{f^2} = \frac{(a+c+e)^3}{(b+d+f)^2}$$

பயிற்சி 4

நிறுவுக :

1. $\frac{a}{b} = \frac{e}{d}$ எனில் $\frac{la+mb}{pa+qb} = \frac{lc+md}{pc+qb}$

2. $a : b = c : d$ என்றால்

   (i) $\frac{a-b}{a+b} = \frac{c-d}{c+d}$ (ii) $\frac{ab+cd}{ab-cd} = \frac{b^2+d^2}{b^2-d^2}$

3. $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ எனில் $\frac{la^2+mal+nb^2}{pa^2+qal+rb^2} = \frac{lc^2+mcd+nd^2}{pc^2+qcd+rd^2}$

4. a, b, c, d என்பவை தொடர் விகிதத்தில் இருந்தால்

   (i) $\frac{a}{b} = \frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+cd}$; (ii) $(a^2+b^2)(c^2+d^2)=(b^2+c^2)^2$

[$\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d}$ என இருந்தால் a, b, c, d தொடர் விகிதத்தில் உள்ளன எனப்படும்].

5. $\frac{a}{b+c-a} = \frac{b}{c+a-b} = \frac{c}{a+b-c}$ என்றால் ஒவ்வொரு விகிதமும் $= 1$.

6. $\frac{x}{2a-b-c} = \frac{y}{2b-c-a} = \frac{z}{2a-a-b}$ என்றால் $x+y+z=0$.

7. $\frac{x+y+z}{a} = \frac{x+y-z}{b} = \frac{x-y+z}{c} = \frac{x+y+z}{d}$ என்றால் $a = b+c+d$.

8. $\dfrac{x}{bc\,(b-c)} = \dfrac{y}{ca\,(c-a)} = \dfrac{z}{ab\,(a-b)}$ என்றால்

$a\,(b+c)\,x+b\,(c+a)\,y+c\,(a+b)\,z=0.$

9. $\dfrac{x}{x+2b+c} = \dfrac{y}{a-c} = \dfrac{z}{a-2b+z}$ என்றால்

$\dfrac{a}{x+2y+z} = \dfrac{b}{x-z} = \dfrac{c}{x-2y+z}$

10. $p\,(l+m-n) = q\,(m+n-e) = r\,(n+l-m)$

என்றால் $\dfrac{l}{p\,(q+r)} = \dfrac{m}{q\,(r+n)} = \dfrac{n}{r\,(p+q)}$

11. $\dfrac{p}{(l+m)} = \dfrac{q}{(m+n)} = \dfrac{r}{(n+l)}$ என்றால்

$l\,(mq+nr-lp) = m\,(nr+lp-mq = n\,(ln+mq-nr).$

12. $\dfrac{a^2-bc}{l} = \dfrac{b^2-ca}{m} = \dfrac{c^2-ab}{n}$ என்றால்

$\dfrac{l^2-mn}{a} = \dfrac{m^2-nl}{l} = \dfrac{n^2-lm}{c}$

3. விகிதமுரு எண்கள்

3·1. **விகிதமுறு எண்கள் :** பகுதியும் தொகுதியும் முழு எண்களாக அமையும் எண்கள் (Rational numbers) எனப்படும். (எ-டு) $\frac{7}{8}$, $\frac{-3}{4}$, $\frac{8}{1}$ என்பவை விகிதமுறு எண்களாகும்.

விகிதமுரு எண்கள் : இவ்வாறு அமையாத எண்கள் விகித முரு எண்கள் எனப்படும். $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{17}$, $\sqrt[4]{41}$ என்பவை விகித முரு எண்கள். $\sqrt{16}$, $\sqrt{81}$ $\sqrt[3]{\frac{27}{8}}$ என்பவை விகிதமுரு எண்கள் அல்ல.

$\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{ab}$ ஆகும்.

$\sqrt{a} \times \sqrt{b} = x$ ஆகுக.

$$\therefore x^2 = \sqrt{a} \times \sqrt{b} \times \sqrt{a} \times \sqrt{b}$$
$$= \sqrt{a} \times \sqrt{a} \times \sqrt{b} \times \sqrt{b}$$
$$= ab$$
$$\therefore x = \sqrt{ab} \qquad \therefore \sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{ab}$$

3·2. **விகிதமுரு எண்களின் தரம் :** $\sqrt{a}$, $\sqrt{a+b}$, என்பவை வர்க்கமூலம். இத்தகைய எண்கள் இருபடித்தரம் எனப்படும். $\sqrt[3]{a}$ $\sqrt[3]{a+b}$ $\sqrt[3]{17}$ என்பவை கனமூலங்கள் இவை முப்படித்தரம். இங்கு இருபடித்தர விகிதமுரு எண்களைப் (Quadralic surds) பற்றியே கூறுவோம்.

ஒத்த எண்கள் : ஒரே எண்ணின் வர்க்க மூலமாக வரும் எண்கள் ஒத்த விகிதமுரு எண்கள் (Similar surds) எனப்படும். $\sqrt{12}$, $\sqrt{75}$, $\sqrt{108}$ என்பவை முறையே $2\sqrt{3}$, $5\sqrt{3}$, $6\sqrt{3}$, ஆகையால் ஒத்தவிகிதமுரு எண்களாகும். இவைகளின் கூடுதல் $2\sqrt{3} + 5\sqrt{3} + 6\sqrt{3} = 13\sqrt{3}$ ஆகும். இவைகளை $2x+5x+6x$ என்பவைகளை ஒன்று சேர்ப்பதுபோல் சேர்க்க முடியும்.

மாதிரி : சுருக்குக : $4\sqrt{5} + 6\sqrt{20} - \sqrt{45}$

$$4\sqrt{5} + 6\sqrt{20} - \sqrt{45}$$

$$= 4\sqrt{5} + 12\sqrt{5} - 3\sqrt{5} = 13\sqrt{5}$$

பயிற்சி 5

சுருக்குக : 1. $\sqrt{12}$, $\sqrt{32}$, $\sqrt{27}$, $\sqrt{125}$, $\sqrt{\frac{48}{121}}$

2. $\sqrt{64a^2b^2}$, $\sqrt{(a-b)(a^2-b^2)}$, $\sqrt{(1+x)^2(x3+1)}$

3. $\sqrt{2} \times \sqrt{3} \times \sqrt{6}$, $\sqrt{2} \times \sqrt{5} \times \sqrt{10}$, $\sqrt{5} \times \sqrt{8} \times \sqrt{10}$.

4. $\sqrt{8} + \sqrt{50} - \sqrt{32}$; $\sqrt{27} - \sqrt{48} - \sqrt{75}$

5. $7\sqrt{75} + 3\sqrt{27} - 11\sqrt{48}$

6. $(\sqrt{2}+1) \times 2\sqrt{2}$ 7. $(\sqrt{5}+\sqrt{2})(\sqrt{5}-\sqrt{2})$

8. $(\sqrt{3}+1) \times (\sqrt{3}+2)$

9. $(4\sqrt{6}-2) \times (2\sqrt{6}+3)$

3·3. **விகிதமுறு எண்ணுக்கல்** (Rationalising): விகிதமுரு எண்ணைத் தக்க காரணிகளால் பெருக்கு, பெருக்கற் பலன் விகிதமுறு எண்ணுக்குவதை விகிதமுறு எண்ணுக்குதல் எனப் படும். அவ்வாறு பயன்படும் காரணிகள் விகிதமுறு எண்ணுக்கும் காரணி (Rationalising factor) எனப்படும். (1) $\sqrt{a} \times \sqrt{a} = a$ ஆவதால் $\sqrt{a}$ ஐ விகிதமுறு எண்ணுக்க $\sqrt{a}$ ஆல் பெருக்க வேண்டும்.

3·4. **ஈருறுப்பு விகிதமுரு எண்** : $(a+b\sqrt{x})$ என்பதில் $\sqrt{x}$ விகிதமுரு எண். இதை $(a-b\sqrt{x})$ ஆல் பெருக்க (a^2-b^2x) எனும் விகிதமுறு எண்ணுகிறது. இதேபோல் $(a-b\sqrt{x})$ இன் துணைக்காரணி (Conjugate factor) $(a+b\sqrt{x})$ ஆகும். $(\sqrt{a}+\sqrt{b})$, $(\sqrt{a}-\sqrt{b})$ இவை ஒன்றற்கொன்று துணைக் காரணிகளாகும்.

மாதிரி : $\frac{2}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} + \frac{4}{3-\sqrt{6}} + \frac{3}{\sqrt{12}-\sqrt{8}}$; சுருக்குக.

கணக்கு $= \frac{2(\sqrt{3}+\sqrt{2})}{3-2} + \frac{4(3+\sqrt{6})}{9-6} + \frac{3(\sqrt{12}+\sqrt{8})}{12-8}$

$$= 2\sqrt{3} + 2\sqrt{2} + \frac{4}{3}(3 + \sqrt{3}) + \frac{3}{4}(2\sqrt{3} + 2\sqrt{2})$$

$$= \frac{12\sqrt{3} + 24\sqrt{2} + 24 + 8\sqrt{3} + 9\sqrt{3} + 9\sqrt{2}}{6}$$

$$= \frac{24 + 21\sqrt{2} + 21\sqrt{3} - 8\sqrt{6}}{6}$$

3·5. **தேற்றம் :** a, b, c, d என்பவை விகிதமுறு எண்களாகவும், $\sqrt{b}, \sqrt{d}$ என்பவை விகிதமுரு எண்களாகவும் அமைந்து $a + \sqrt{b} = c + \sqrt{d}$ ஆனால் $a=c$, $b=d$ என ஆகும்.

$a = c$ என இராவிடில் $a = c + x$ ஆகுக.

$a + \sqrt{b} = c + \sqrt{d}$ (கொள்கை)

$\therefore\ c + \sqrt{b} = c + \sqrt{d}$ $\quad\therefore\ x^2 + b + 2x\sqrt{b} = d$

$\therefore\ x + \sqrt{b} = \sqrt{d}$

$$\therefore\ \sqrt{b} = \frac{d-b-x^2}{2x}$$

அதாவது விகிதமுறு எண், விகிதமுரு எண்ணுக்குச் சமம் என ஒரு பொருந்தா முடிவுக்கு வருகிறோம் $\therefore\ a=c$; $\therefore\ b=d$ என வருகிறது.

குறிப்பு: 1 $x+\sqrt{b} = \sqrt{d}$. ($\sqrt{b}, \sqrt{d}$ விகிதமுரு எண்களால்) $x=0$ என ஆகிறது. அதாவது விகிதமுறு எண், விகிதமுரு எண் இதற்றின் கூடுதலாகக் கூற இயலாது.

குறிப்பு: 2. $x + \sqrt{y} = a + \sqrt{b}$ ஆனால் $x=a$; $\sqrt{y} = \sqrt{b}$

$\therefore\ x - \sqrt{y} = a - \sqrt{b}$ என வருகிறது.

குறிப்பு: 3 $X + \sqrt{y} = A + \sqrt{B}$ என்று சமன் பாட்டில் $X, A,$ என்பவை முற்றிலும் விகிதமுறு எண்களாகவும் $\sqrt{Y}$ $\sqrt{B}$ விகிதமுரு எண்களாகவும் ஆனால் $X = A$, $Y = B$ என இரு சமன்பாடுகள் வருகின்றன.

3·6. **ஈருறுப்பு விகிதமுரு எண் கோவையின் வர்க்கமூலம்.**

மாதிரி. $41 + 6\sqrt{32}$ இன் வர்க்கமூலம் காண

$\sqrt{41 + 6\sqrt{32}} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$ ஆகுக.

$\therefore\ \sqrt{41 - 6\sqrt{32}} = \sqrt{x} - \sqrt{y}$

பெருக்க: $\sqrt{(41)^2 - 36 \times 32} = x - y$

$\therefore \quad x - y = \sqrt{529} = 23$

வர்க்கமாக்க: $41 + 6\sqrt{32} = x + y + 2\sqrt{xy}$

$\therefore \quad x + y = 41$

$\therefore \quad x = 32 \quad y = 9$

$\therefore \quad \sqrt{41 + 6\sqrt{32}} = \sqrt{32} + \sqrt{9} = (4\sqrt{2} + 3)$

மாற்றுவழி: $41 + 6\sqrt{32} = 41 + 2\sqrt{32 \times 9} = (\sqrt{x} + \sqrt{y})^2$ ஆகுக.

$\therefore \; 41 + 2\sqrt{32 \times 9} = x + y + 2\sqrt{xy}$

$\therefore \quad x + y = 41$

$\therefore \quad xy = 32 \times 9$

$\therefore \quad x = 32 = y = 9$

$\therefore \quad \sqrt{41 + 6\sqrt{32}} = \sqrt{32} + \sqrt{9}$

$= (4\sqrt{2} + 3)$

குறிப்பு: (*i*) வர்க்கமூலம் காண $x \pm 2\sqrt{y}$ உருவத்தில் கொண்டு வரவும் (*ii*) 'x' கூடுதல் வரும்படி yஐ இரண்டு காரணிகளாகப் பிரிக்கவும். அவை a, b எனின்

$\sqrt{x + 2\sqrt{y}} = \sqrt{a} - \sqrt{b}$ ஆகும்.

$\sqrt{x - 2\sqrt{y}} = \sqrt{a} - \sqrt{b}$ ஆகும்.

(எ—டு) $\sqrt{4 + 2\sqrt{3}} = \sqrt{3} + \sqrt{1}$

$\sqrt{17 + 6\sqrt{8}} = \sqrt{17 + 2\sqrt{9 \times 8}} = \sqrt{9} + \sqrt{8}$

மாதிரி: சுருக்குக:

$$\frac{1}{\sqrt{12 - 2\sqrt{35}}} - \frac{1}{\sqrt{8 - 2\sqrt{15}}} - \frac{2}{\sqrt{10 + 2\sqrt{21}}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{12 - 2\sqrt{35}}} = \frac{1}{\sqrt{7} - \sqrt{5}} = \frac{\sqrt{7} + \sqrt{5}}{7 - 5}$$

$$\frac{1}{\sqrt{8 - 2\sqrt{15}}} = \frac{1}{\sqrt{5} - \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{5} + \sqrt{3}}{5 - 3}$$

$$\frac{1}{\sqrt{10 + 2\sqrt{21}}} = \frac{1}{\sqrt{7} + \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{7} + \sqrt{3}}{7 - 3}$$

$\therefore$ கணக்கு $= \dfrac{(\sqrt{7} + \sqrt{5})}{2} - \dfrac{(\sqrt{5} + \sqrt{3})}{2} - \dfrac{2(\sqrt{7} - \sqrt{3})}{4}$

$$= \frac{\sqrt{7} + \sqrt{5} - \sqrt{5} - \sqrt{3} - \sqrt{7} + \sqrt{3}}{2} = 0$$

பயிற்சி 6

1 $\sqrt{2} = 1{\cdot}414$, $\sqrt{3} = 1{\cdot}732$ என்றால் 3 தசமத்தானத் திருத்தமாக மதிப்புக் காணவும்.

$$\frac{1}{\sqrt{2}},\quad \frac{1}{\sqrt{3}},\quad \frac{1}{\sqrt{12}},\quad \frac{3}{\sqrt{8}},\quad \frac{5}{\sqrt{27}}$$

2. பகுதியை விகிதமுறு எண்ணாக்கிப் பின்னத்தை எழுதுக.

$$\frac{1}{\sqrt{2}+5},\quad \frac{3}{2-\sqrt{3}},\quad \frac{2}{\sqrt{5}-\sqrt{3}},\quad \frac{2-\sqrt{5}}{2+\sqrt{3}},$$

$$\frac{1}{4\sqrt{3}-1},\quad \frac{8}{7+3\sqrt{5}},\quad \frac{3-\sqrt{5}}{7-\sqrt{5}},\quad \frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}.$$

3. சுருக்குக :

(i) $\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{3}+1} - \dfrac{1}{\sqrt{3}-1}$

(ii) $\dfrac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} - \dfrac{1+2\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} + \dfrac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}$

(iii) $\dfrac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}+\sqrt{2}} + \dfrac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}$

4. வர்க்கமூலம் எழுதுக :

(i) $8+2\sqrt{15}$, $13+2\sqrt{22}$, $11+2\sqrt{28}$, $13-2\sqrt{36}$,
$6-2\sqrt{5}$, $8-2\sqrt{7}$, $7+4\sqrt{3}$, $14+6\sqrt{5}$,
$89-28\sqrt{10}$, $24+8\sqrt{5}$, $11+4\sqrt{7}$, $14-3\sqrt{20}$.

5. வர்க்கமூலம் காண்க:

(i) $94+6\sqrt{245}$ (ii) $5(3-2\sqrt{2},)$ (iii) $119+20\sqrt{33}$.
(vi) $4\sqrt{2}+2\sqrt{6}$ (v) $7\sqrt{3}-2\sqrt{18}$ (vi) $\sqrt{45}+\sqrt{40}$.
(vii) $55-12\sqrt{21}$ (viii) $61-28\sqrt{3}$.
(ix) $\sqrt{-\sqrt{3}+\sqrt{4+\sqrt{5}+\sqrt{17-4\sqrt{15}}}}$ எனக் காட்டு. (M.U.)

6. சுருக்குக:

(i) $\dfrac{1}{\sqrt{5+2\sqrt{6}}} - \dfrac{2}{\sqrt{8-2\sqrt{15}}} + \dfrac{3}{\sqrt{7-2\sqrt{10}}}$

(ii) $\dfrac{3}{\sqrt{13+4\sqrt{10}}} - \dfrac{2}{\sqrt{19+2\sqrt{35}}} - \dfrac{1}{\sqrt{15+4\sqrt{14}}}$

(iii) $\frac{1}{\sqrt{12-\sqrt{140}}} - \frac{1}{\sqrt{8-\sqrt{60}}} - \frac{2}{\sqrt{10+\sqrt{84}}}$

(iv) $\frac{1}{\sqrt{11-2\sqrt{30}}} - \frac{3}{\sqrt{7-2\sqrt{10}}} - \frac{4}{\sqrt{8+4\sqrt{3}}}$

3.7. மூவுறுப்பு விகிதமுரு எண்

$(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})$ என்பது மூவுறுப்பு விகிதமுரு எண். இதைச் சில காரணிகளால் பெருக்க, விகிதமுறு கோவையாக மாறும் $(x+y+z)\ (x+y-z)\ (x-y+z)\ (-x+y+z)$

$$= \{(x+y)^2 - y^2\}\ \{z^2-(y-x)^2\}$$
$$= (\overline{x^2+y^2-z^2}+2xy)\ (z^2-y^2-x^2+2xy)$$
$$= \{(2xy + x^2+y^2-z^2)\ (2xy - \overline{x^2+y^2-z^2})$$
$$= 4x^2y^2-(x^2+y^2-z^2)^2$$
$$= 2x^2y^2+2y^2z^2+2z^2x^2-x^4-y^4-z^4$$

$x=\sqrt{a}\quad y=\sqrt{b}\quad z=\sqrt{c}$ என்றால் இது

$(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})\quad(\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c})$

$(\sqrt{a}-\sqrt{b}+\sqrt{c})\quad(-\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})$

$$= 2ab+2bc+2ca-a^2-b^2-c^2$$

என விகிதமுறு எண்களாக வருகிறது.

மாதிரி: $\frac{1}{3+\sqrt{2}-\sqrt{7}}$ என்ற பின்னத்தின் பகுதியை விகிதமுறு எண்ணுக்கவும்.

$$\frac{1}{3+\sqrt{2}-\sqrt{7}} =$$

$$=\frac{(3+\sqrt{2}-\sqrt{7})\ (3+\sqrt{2}+\sqrt{7})\ (-3+\sqrt{2}+\sqrt{7})}{(\sqrt{9}+\sqrt{2}+\sqrt{7})\ (\sqrt{9}+\sqrt{2}-\sqrt{7})\ (\sqrt{9}-\sqrt{2}+\sqrt{7})\ (-\sqrt{9}+\sqrt{2}+\sqrt{7})}$$

$$=\frac{[(3+\sqrt{7})^2-2]\ [\sqrt{7}+\sqrt{2}-3]}{36+28+126-81-4-49}$$ [சூத்திரம் பயன்படுத்தி]

$$=\frac{[14+6\sqrt{7}]\ [\sqrt{7}+\sqrt{2}-3]}{56}$$

$$=\frac{14\sqrt{7}+14\sqrt{2}-52+42+6+\sqrt{14}-18\sqrt{7}}{56}$$

$$=\frac{6\sqrt{14}+14\sqrt{2}-4\sqrt{7}-10}{56}$$

$$=\frac{3\sqrt{14}+7\sqrt{2}-2\sqrt{7}-5}{56}$$

பயிற்சி 7

கீழ் வரும் பின்னங்களில் பகுதி விகிதமுறு எண்களாக வரும்படி எழுது.

1. $\frac{1}{2+\sqrt{3}+\sqrt{7}}$ 2. $\frac{1}{3+\sqrt{5}+\sqrt{7}}$

3. $\frac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{5}}$ 4. $\frac{1}{1-\sqrt{2}-\sqrt{3}}$

3.8 மூவுறுப்பு விகிதமுரு எண்ணின் வர்க்க மூலம்.

$(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z})^2 = x+y+z+2\sqrt{xy}+2\sqrt{xz}+2\sqrt{yz}$ ஆகவே $a+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d}$ என்ற கோவையின் வர்க்கமூலம் $(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z})$ என்ற வடிவத்தில் இருக்கவேண்டும். இதேபோல $(\sqrt{x}-\sqrt{y}+\sqrt{3})^2 = x+y+z-2\sqrt{xy}-2\sqrt{yz}+2\sqrt{xz}$ ஆவதால் $a-\sqrt{b}-\sqrt{c}+\sqrt{d}$ என்ற கோவையின் வர்க்க மூலம் $(\sqrt{x}-\sqrt{y}+\sqrt{z})$ என்ற வடிவத்தில் இருக்கவேண்டும்.

மாதிரி: $6-\sqrt{8}+\sqrt{12}-\sqrt{24}$ இன் வர்க்கமூலம் காண்க.

$6-\sqrt{8}+\sqrt{12}-4\sqrt{24}=(\sqrt{x}-\sqrt{y}+\sqrt{z})^2$ ஆகுக.

$\therefore\ 6-2\sqrt{2}+2\sqrt{3}-2\sqrt{6}=x+y+z-2\sqrt{xy}+2\sqrt{xz}-2\sqrt{yz}$

$\therefore\ x+y+z = 6 \quad 2\sqrt{xy}=2\sqrt{2}; \quad 2\sqrt{xz}=2\sqrt{3}$

$2\sqrt{yz} = 2\sqrt{6}$

$\therefore\ x+y+z = 6\ xy=2,\ xz=3,\ yz=6$

$\therefore\ x^2y^2z^2 = 36$

$x\ y\ z = 6$ ஆனால் $x\ y=2 \quad \therefore\ z=3$

$x\ z = 3 \quad \therefore\ y = 2$

$y\ z = 6 \quad \therefore\ x = 1$

$\therefore\ x = 1\quad y = 2,\ z = 3$

$\therefore$ வர்க்கமூலம் $= \sqrt{1}-\sqrt{2}+\sqrt{3}$

$= 1-\sqrt{2}+\sqrt{3}$

பயிற்சி 7 (a)

வர்க்கமூலம் காண்க :

1. $19 + 4\sqrt{15} + 2\sqrt{10} + 4\sqrt{6}$
2. $10 - 2\sqrt{6} + 2\sqrt{10} - 2\sqrt{5}$
3. $12 + 4\sqrt{2} + 2\sqrt{3} + 4\sqrt{6}$
4. $9 + 2\sqrt{3} - 2\sqrt{15} - 2\sqrt{5}$
5. $35 + 12\sqrt{6} + 6\sqrt{10} + 4\sqrt{15}$
6. $11 + 2\sqrt{7} - 2\sqrt{3} - 2\sqrt{21}$
7. $12 - 4\sqrt{5} - 2\sqrt{15} + 4\sqrt{3}$
8. $19 - 6\sqrt{7} - 6\sqrt{3} + 2\sqrt{21}$
9. $26 + 2\sqrt{22} + 2\sqrt{26} + 2\sqrt{143}$
10. $18 + 8\sqrt{3} + 4\sqrt{6} + 8\sqrt{2}$

4. அடுக்கு விதிகள்
(Theory of Indices)

4·1. **அடுக்கு : விளக்கம்.** a^m என்ற குறியீடு. $a \times a \times a \times \ldots$ என m காரணிகளின் பெருக்கற் பலனைக் குறிக்கிறது (m நேர் முழு எண்ணாகும்).

நேரெண் அடுக்குகள் 'a' இன் அடுக்குகள் நேரெண் களானல் $a^m \times a^n = a^{m+n}$ என மேற் கூறிய விளக்கத்திலிருந்து காண முடியும்.

$$a^m = a \times a \times a \quad \ldots \quad \ldots \quad (m \text{ காரணிகள்})$$

$$a^n = a \times a \times a \quad \ldots \quad \ldots \quad (n \text{ காரணிகள்})$$

$$\therefore \quad a^m \times a^n = (a \times a \times a \ldots)(m \text{ காரணிகள்}) \times (a \times a \ldots n \text{ காரணிகள்}).$$
$$= a \times a \times a \quad \ldots \quad \ldots \quad \overline{m+n} \text{ காரணிகள்})$$

$$\therefore \quad a^m \times a^n = a^{m+n} \qquad \textbf{(விதி. 1)}$$

இதைத் தொடர்ந்து செயலாற்றினல்

$a^m \times a^n \times a^r \times a^q = a^{m+n+r+q}$ என வருகிறது.

விதி 2 $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$; $(m>n)$

$\dfrac{a^m}{a^n} = \dfrac{1}{a^{n-m}}$ $(m<n)$

விதி 3 $(a^m)^n = a^{mn}$

விதி 4 $(ab)^m - a^m b^m$

குறிப்பு : ஆக்வே $(a^r b^q c^r)^m = (a^{rm} b^{qm} c^{rm})$

பயிற்சி 8

சுருக்குக :

1. $\dfrac{(21)^5, (24)^2, (12^2)^2}{(2^3)^2, (3^4)^2, (42)^5}$

2. $\left(\dfrac{5ab}{2cd}\right)^2 \times \left(\dfrac{2c^3d^2}{3a^3b\,d}\right)^3 \div \left(\dfrac{c\,d}{a\,b}\right)^4$

3. $\left(\dfrac{a-b}{a-c}\right)^4 \times \left(\dfrac{b-c}{b-a}\right)^4 \times \left(\dfrac{c-a}{c-b}\right)^4$

4. $\left(\dfrac{a^3\,x^3\,y^3}{b^2\,c^2}\right)^3 \times \left(\dfrac{b^3\,y^3\,z^3}{c^2\,a^2}\right)^3$

4·2. பின்ன அடுக்குகள்; எதிரெண் அடுக்குகள் : a^m என்பதற்கு m நேர் முழு எண்ணாக இருந்தால் பொருள் கூறி, அடுக்கு விதிகளை வரவழைத்தோம். அடுக்கு m, விகிதமுறு எண்களாக, அதாவது நேரெண், எதிரெண் பின்னங்களாக இருந்தால் அதன் பொருளென்ன என்று பார்ப்போம்.

$a^m \times a^n = a^{m+n}$ என்ற விதி எல்லா எண்களுக்கும் பொருந்தும்படி பொருள் கற்பிப்போம்.

a^o **இன் பொருள்** $a^m \times a^n = a^{m+n}$

$n = o$ எனப் பிரதியிட $a^m \times a^o = a^{m+o}$

$\therefore\; a^m \times a^o = a^m$

இவ்வாறு அமைய a^o இன் மதிப்பு 1 அகவேண்டும்.

$\therefore\; a^o = 1$ எனப்பொருள் கூறுவோம்.

n முழு எண்ணாகும்போது a^n என்பதன் பொருள்.

$a^m \times a^n = a^{m+n}$ என்பது விதி.

$m = -n$ எனப் பிரதியிட $a^{-n} \times a^n = a^{-n+n}$

$\therefore\; a^{-n} \times a^n = a^o = 1$

$\therefore\; a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$ என வருகிறது.

(குறிப்பு : மறுதலையாக $\dfrac{1}{a^n}$ என்பது a^{-n} ஆகும்.

(எ—டு) $\frac{1}{4} = 4^{-1}$; $\frac{1}{81} = \frac{1}{3^4} = 3^{-4}$;)

$a^{p/q}$ 4ன்பதன் பொருள் — (p, q என்பவை முழு எண்கள்) q நேர்முழு எண் ஆகுக.)

$\therefore \quad a^{p/q} \times a^{p/q} \times a^{p/q} \quad \ldots \quad \ldots$ q காரணிகள் வரை

$= a\,(^{p/q+p/q+p/q} \quad \ldots \quad \ldots$ q உறுப்புக்கள்)

$= \quad \therefore \quad (a^{p/q})^q \quad = \quad a^p$

$\therefore \quad a^{p/q} \quad = \quad a^p$ யின் qவது மூலம்.

அதாவது $a^{p/b} = \sqrt[q]{ap}$

$[\sqrt{x} = x^{1/2}; \quad \sqrt[3]{x} = x^{1/3}; \quad x^{2/3}; \quad x^{2/3} = \sqrt[3]{x2}]$

முடிவுகளை சுருக்கிக் கூற: $a^o = 1$; $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$; $a^{p/q}$; $\sqrt[6]{ap}$

4·3. அடுக்குவிதிகளின் பொது நிரூபணம் :

ஒரு எண்ணின் அடுக்கு விகிதமுறு எண்கள் ஏதானுலும் அதன் பொருள் என்ன என்று விளக்கினேம். இத்தகைய பொருளுடன், அடுக்கு விதிகள் யாவும் எல்லா விகிதமுறு அடுக்குகளுக்கும் பொருந்தும் எனக் காட்டுவோம்.

விதிகள் ஆவன (i) $a^m \times a^n = a^{m+n}$

(ii) $a^m \div a^n = a^{m-n}$

(iii) $(a^m)^n = a^{mn}$

(iv) $(ab)^n = a^n b^n$

முதல் விதி : $a^m \times a^n = a^{m+n}$

(i) m, n இரண்டும் நேர் முழு எண்களானுல் $a^m \times a^n = a^{m+n}$ எனக் கண்டுள்ளோம்.

(ii) $m = \frac{p}{q}$, $n = \frac{r}{s}$; p, q, r, s, நேர் முழு எண்கள்

அப்போது $a^m \times a^n = a^{p/q} \times a^{r/s}$

$= \sqrt[q]{a^p} \times \sqrt[s]{a^r}$

$= \sqrt[qs]{a^{ps}} \times \sqrt[qs]{a^{qr}}$

$= \sqrt[qs]{a^{ps} \cdot a^{qr}}$

$= \sqrt[qs]{a^{ps+qr}}$

$= a^{\frac{ps+qr}{qs}}$

$= a^{\frac{p}{q}+\frac{r}{s}}$

$\therefore \quad a^m \times a^n = a^{m+n}$

(iii) $m = -\mathrm{R}$; R, n இரண்டும் நேர் முழு எண்கள்

$\therefore \quad a^m \times a^n = a^{-\mathrm{P}} \times a^n$

$= \dfrac{a^n}{a^P}$

$= a^{n-P} \qquad (n > \mathrm{P})$

$= a^{n+(-P)}$

$= a^{n+m}$

$\therefore \quad a^m \times a^n = a^{m+n}$

$n < \mathrm{P}$ ஆனல்

$a^m \times a^n = \dfrac{1}{a^{p-n}} = a^{(p-n)} = a^{-p+n}$

$\therefore \quad a^m \times a^n = a^{m+n}$

(iv) $m = -r$, $n = -q$ (r, q இரண்டும் நேரெண்கள்).

$a^m \times a^n = a^{-r} \times a^{-q} = \dfrac{1}{a^P} \times \dfrac{1}{a^q} = \dfrac{1}{a^{P+q}}$

$\therefore \quad a^m \times a^n = a^{-(P+q)}$

$= a^{P-q}$

$= a^{m+n}$

விதி 2. $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m+n}$

$a^{m-n}\ a^n = a^m$

$\therefore \quad \dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

[m, n இன் எல்லா மதிப்புக்களுக்கும்]

விதி 3. $(a^m)^n = a^{mn}$

(i) m, n இவை நேர் முழு எண்களாயின் $(a^m)^n = a^{mn}$ என ஏற்கனவே கண்டோம்.

(ii) n நேர் முழு எண்; m ஏதேனும் ஒரு எண்.

அப்போது $(a^m)^n = a^m \times a^m \times a^m \times \ldots\ldots$ என n காரணிகள்

$m + m + m + \ldots\ldots$ என n உறுப்புக்கள்

$= a$

$\therefore \ (a^m)^n = a^{nm}$

(iii) m ஏதேனும் ஒரு எண்; $n = \frac{r}{q}$; P, q இரண்டும் நேர் முழு எண்கள்.

$$(a^m)^n = (a^m)^{P/q} = \sqrt[q]{(a^m)^P} = \sqrt[q]{a^{mP}}$$

$$\therefore \ (a^m)^n = a^{\frac{mP}{q}} = a^{mn}$$

(iv) m ஏதேனும் ஒரு எண் $n = -r$ (P நேர்விகிதமுறு எண்).

$$\therefore \ (a^m)^n = (a^m)^{-P} = \frac{1}{(a^m)^P} = \frac{1}{a^{mP}}$$

$$\therefore \ (a^m)^n = a^{-mp} = a^{mr-P} = a^{mn}$$

விதி 4. $(ab)^n = a^n \cdot b^n$

(i) n நேர் முழு எண்ணாகும்போது $(ab)^n = a^n \cdot b^n$ எனக் காட்டியுள்ளோம்.

(ii) $n = \frac{P}{q}$ — (P, q என்பவை நேர் முழு எண்கள்)

$$(ab)^n = (ab)^{P/q} = \sqrt[q]{(ab)^P} = \sqrt[q]{a^P\, b^P}$$

$$\therefore \ (ab)^n = \sqrt[q]{a^P} \cdot \sqrt[q]{b^P} = a^{P/q} \cdot b^{P/q}$$

$$\therefore \ (ab)^n = a^n \cdot b^n$$

(iii) $n = -p$ (r நேர் விகிதமுறு எண்)

$$(ab)^n = (ab)^{-P} = \frac{1}{(ab)^P} = \frac{1}{a^P\ b^P}$$

$$\therefore \ (ab)^n = a^{-P}\ b^{-P}$$

$$\therefore \ (ab)^n = a^n\ b^n$$

மாதிரி : $\frac{1}{1+x^{a-b}+x^{a-c}}+\frac{1}{1+x^{b-c}+x^{b-a}}=\frac{1}{1+x^{c-a}+x^{c-b}}=1$ எனக்காட்டு.

$$\text{இடது பக்கம்} = \sum \frac{x^{-a}}{x^{-a}(1+x^{a-b}+x^{a-c})}$$
$$= \sum \frac{x^{-a}}{x^{-a}+a^{-b}+x^{-c}}$$
$$= \frac{x^{-a}+x^{-b}+x^{-c}}{x^{-a}+x^{-b}+x^{-c}}$$
$$= 1.$$

மாதிரி : $\sqrt[a]{x^{b-c}} \cdot \sqrt[b]{x^{c-a}} \cdot \sqrt[c]{x^{a-b}} = 1.$ என்றால், a, b, c என்ற எண்களுள் இரண்டு சமமாக இருக்கும் எனக்காட்டு.

$$\text{இடது பக்கம்} = x^{\frac{b-c}{a}} \cdot x^{\frac{c-a}{b}} \cdot x^{\frac{a-b}{c}}$$
$$= x^{\frac{b-c}{a}+\frac{c-a}{b}+\frac{a-b}{c}}$$
$$= x^{\frac{bc(b-c)+ca(c-a)+ab(a-b)}{abc}}$$

x இன் அடுக்கு 0 ஆனால் இடது பக்கம் 1 ஆக இருக்கும்.

$\therefore \quad bc(b-c)+ca(c-a)+ab(a-b) = 0$

$\therefore \quad (b-c)(c-a)(a-b) = 0$

$\therefore \quad b=c$ அல்லது $c=a$ அல்லது $a=b$. a, b, c என்ற எண்களுள் இரண்டு எண்களாவது சமம்.

பயிற்சி 9

1. சுருக்குக: $\frac{2^{n} \times 5 - 2^{n-2} \times 12}{2^{n+1} \times 3 - 2^{n}}$

2. ,, $\frac{7 \times 81^{\frac{3n}{4}} - 21 \times 9^{3/2}}{3^{3n-2} - 3^{n-1}}$

3. ,, $\frac{\left(3^{m+1}\right)^{n}}{\left(3^{n+1}\right)^{m}} \cdot \frac{3^{3m}}{3^{3n}} \cdot 3^{2(m-n)}$

4. $(a^x)^{y-z} \cdot (a^y)^{z-x} \cdot (a^8)^{x-y}$

5. $\left(\frac{a^n}{a^q}\right)^{p+q} \times \left(\frac{a^q}{a}\right)^{1+q} \times \left(\frac{{}^2a}{a^P}\right)^{1+P}$.

6. $x = y^8$; $y = z^x$; $z = x^y$ என்றால் $xyz = 1$ என நிறுவுக.

7. $$\frac{1}{1+a^{p-q}+a^{p-r}} + \frac{1}{1+a^{q-r}+a^{q-b}} + \frac{1}{1+a^{r-p}+a^{2-q}} = 1$$

எனக் காட்டு.

8. $P^x = q$ $q^y = r$ என்றால்

$\frac{1}{x+1} + \frac{1}{y+1} = 1$ என நிரூபிக்க.

9. a, b, c ஒன்றற்கொன்று சமமல்லாமல்

$$\left(\frac{b+c}{x^{b-c}}\right)^{\frac{1}{a-b}} \times \left(\frac{c+a}{x^{c-a}}\right)^{\frac{1}{b-c}} \times \left(\frac{a+b}{x^{a-b}}\right)^{\frac{1}{c-a}}.$$ ஐச் சுருக்குக.

10. சுருக்குக. $\sqrt[bc]{\frac{x^b}{x^c}} \cdot \sqrt[ca]{\frac{x^c}{x^a}} \cdot \sqrt[ab]{\frac{x^a}{x^b}}$

11. $x^y = y^x$; $x = 2y$ என்றால் $y = 2$ எனக் காட்டு.

12. சுருக்கு. $\frac{1}{1+x^{p-q}} + \frac{1}{1+x^{q-p}}$.

13. $a^x = b^y = c^z$; $b^2 = ac$ என்றால்

$\frac{1}{x} + \frac{1}{z} = \frac{2}{y}$ எனக் காட்டு.

14. $a^x = bc$; $b^y = ca$, $c^x = ab$

என்றால் $xyz = x + y + z + 2$ என நிறுவுக.

5. இலாகரிதம்

5·1. அடுக்கு விதிகளைப் பற்றி விவரித்தபொழுது a^m என்றதில் aஇன் அடுக்கு m, நேரெண், எதிரெண், முழு எண், பின்ன எண், ஆகியவற்றில் ஏதாகிலும் இருக்கலாம் எனக் கண்டோம். N எனும் எண்ணை 'a' என்ற ஒரு எண்ணின் அடுக்காக எழுத முடியும். அதாவது $K = a^x$ எனும் சமன்பாடு காண முடியும். xஐ இந்தச் சூத்திரத்தின் எழுவாயாக்கினால், இலாகரிதத்தின் விளக்கம் வருகிறது :

5·2. **இலாகரிதம் :** (விளக்கம்). N எனும் எண்ணை, $N = a^x$ எனக் கூற முடிந்தால், x என்பது aஐ அடி எண்ணாகக் கொண்ட Nஇன் இலாகரிதம் எனப்படும். இதை $x = log_a N$ எனக் கணிதக் குறியீட்டில் எழுதுகிறோம். ஆகவே 'a' என்ற அடி யெண்ணுக்கு Nஇன் இலாகரிதம் என்ன எனக் கேட்டால் 'a'யின் எந்த அடுக்கு N எனும் எண்ணைத் தருமோ அந்த அடுக்கே Nஇன் இலாகரிதம் எனப்படும்.

(எ—டு) $64 = 2^6 \quad \therefore \quad log_2 64 = 6$

$64 = 4^3 \quad \therefore \quad log_4 64 = 3$

[இங்கு எண் ஒன்றே. ஆனால் அடி யெண் மாறும்போது இலாகரிதம் மாறுகிறது.]

$$\frac{1}{125} = 5^{-3} \quad \therefore \quad log_5 \frac{1}{125} = -3$$

$$\frac{1}{16} = 2^{-4} \quad \therefore \quad log_2 \frac{1}{16} = -4$$

$$\cdot 001 = 10^{-3} \quad \therefore \quad log_{10} \cdot 001 = -3$$

[குறிப்பு: அடி எண் நேரெண்ணாக இருந்தால் அதன் அடுக்குகள் நேரெண்ணையே தரும். ஆகையால் எதிரெண்களின் இலாகரிதம் காண இயலாது.]

குறிப்பு 1. $a^0 = 1$

$\therefore \quad \log_a 1 = 0$

அதாவது எல்லா அடி எண்களுக்கும் 1இன் இலாகரிதம் பூச்சிய மாகும்.

குறிப்பு 2. $a^1 = a \quad \therefore \quad \log_a a = 1$

ஒரு எண்ணின் இலாகரிதம், அதே எண்ணை அடி யெண்ணுகக் கொண்டால் 1 ஆகும்.

பயிற்சி 10 (வாய்மொழி)

1. பூர்த்தி செய்க:

(i) $3^3 = 27 \quad \therefore \quad \log_3 27 = \text{— —}$.

(ii) $5^4 = 625 \quad \log_5 625 = \text{— —}$.

(iii) $7^3 = 343 \quad \log^7 343 = \text{— —}$.

(iv) $10^0 = 1 \quad \therefore \quad \log_{10} 1 = \text{— —}$.

(v) $10^{-2} = \cdot 01 \quad \therefore \quad \log_{10} \cdot 01 = \text{— —}$.

(vi) $\frac{1}{2^5} = \frac{1}{32} \quad \therefore \quad \log_2 \frac{1}{32} = \text{— —}$.

2. $a^x = b$ என்ற உருவத்தில் எழுதுக:

(i) $\log_{10} 1000 = 3$ (ii) $\log_3 27 = 3$ (iii) $\log_{10} 2 = \cdot 3010$

(iv) $\log_{10} 7 = \cdot 8421$ (v) $\log_a x = \text{M}$ (vi) $\log^{xa} = \text{N}$.

3. கீழ் வரும் இலாகரிதங்களைக் கூறுக:

(i) $\log_2 16$ (ii) $\log_{10} 10000$ (iii) $\log_3 81$.

(iv) $\log_9 81$ (v) $\log_2 \frac{1}{4}$ (vi) $\log_3 \frac{1}{81}$

(vii) $\log_{10} \frac{1}{1000}$ (viii) $\log_{10} \frac{1}{10}$ (ix) $\log_5 \frac{1}{125}$.

4. xஇன் மதிப்புக் காண்க:

(i) $\log_6 x = 2$ (ii) $\log_8 x = 3$ (iii) $\log_{27} x = \frac{2}{3}$.

(iv) $\log_{33} x = \frac{3}{5}$ (v) $\log \sqrt[x]{_2 x} = 4$ (vi) $\log_8 x^{2/5} = \frac{4}{5}$

5·3. பொது இலாகரித விதிகள் :

1. $\log_a (\text{M} \times \text{N}) = \log_a \text{M} + \log_a \text{N}$ என நிறுவ

$\log_a \text{M} = x$ ஆகுக $\quad \therefore \quad \text{M} = a^x$

$\log_a \text{N} = y$ ஆகுக $\quad \therefore \quad \text{N} = a^y$

$$\therefore \quad M \times N = a^x \times a^y$$

$$\therefore \quad MN = a^{x+y}$$

$$\therefore \quad \log_a MN = x + y$$

$$\therefore \quad \log_a (MN) = \log_a M + \log_a N$$

குறிப்பு : இதேபோல $\log_a (M \cdot N \cdot R \ldots)$

$= \log_a M + \log_a N + \log_a R \ldots$ என் வரும்.

ஆகவே காரணிகளின் பெருக்கற் பலனின் இலாகரிதம். அவற்றின் இலாகரிதங்களுடைய கூடுதல் ஆகும்.

2\. $\log_a \left(\frac{M}{N}\right) = \log_a M - \log_a N$ என நிறுவ

$\log_a M = x$ ஆகுக $\quad \therefore \quad M = a^x$

$\log_a N = y$ ஆகுக $\quad \therefore \quad N = a^y$

$$\therefore \quad \frac{M}{N} = \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$$

$$\therefore \quad \log_a \left(\frac{M}{N}\right) = x - y$$

$$\therefore \quad \log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$$

3\. $\log_a (M)^P = P \log_a M$ என நிறுவ

$\log_a M = x$ ஆகுக

$$\therefore \quad M = a^x$$

$$\therefore \quad M^P = (a^x)^P = a^{Px}$$

$$\therefore \log_a M^P = Px$$

$$\therefore \log_a M^P = P \log_a M$$

குறிப்பு 1. $\log_a \sqrt[q]{M} = \log_a M^{1/q} = \frac{1}{q} \log_a M$

$$\therefore \quad \log_a \sqrt{M} = \tfrac{1}{2} \log_a M$$

குறிப்பு 2. $\log_a M^P \cdot N^q \ldots = \log_a M^P + \log_a N^q + \ldots$

$= P \log_a M + q \log_a N +$

5·4. முடிவுகளைச் சுருக்கிக் கூறு :

(i) காரணிகளின் பெருக்கற்பலனின் இலாகரிதம் = காரணிகளின் இலாகரிதங்களின் கூடுதலானவை.

(ii) ஒரு பின்னத்தின் இலாகரிதம் = தொகுதியின் இலாகரிதம் — பகுதியின் இலாகரிதம்.

(iii) ஒரு எண்ணின் P அடுக்கின் இலாகரிதம், அந்த எண்ணின் இலாகரிதத்தைப்போல் r மடங்கு.

(iv) ஒரு எண்ணின் qவது மூலத்தின் இலாகரிதம், அந்த எண்ணின் இலாகரிதத்தில் qவில் ஒரு பங்கு.

5·5. அடிஎண் மாற்றம் : ஒரு அடிஎண்ணுக்கு எண்களில் இலாகரிதம் தரப்பட்டால் இன்னொரு எண்ணை அடியெண்ணுகக் கொண்டு இலாகரிதம் காணும் சூத்திரம் :

எல்லா எண்களுக்கும் 'a' என்ற அடிஎண்ணுக்கு இலாகரிதம் தரப்பட்டுள்ளது. அப்போது 'b' என்ற எண்ணை அடியெண்ணுகக் கொண்டால் எண்களின் இலாகரிதம் என்ன? '**N**' என்பது ஏதாகிலும் ஒரு எண் ஆகுக.

$\therefore \quad log_a \text{N} = x$ ஆகுக

$log_a b = y$ ஆகுக.

$\therefore \quad \text{N} = a^x \qquad b = a^y \qquad \therefore \quad a = b^{1/y}$

$\therefore \quad \text{N} = (b^{1/y})^x \qquad \therefore \quad \text{N} = b^{\frac{x}{y}}$

$$\therefore \quad log_b \text{N} = \frac{x}{y}$$

$$\therefore \quad log_b \text{N} = \frac{log_a \text{N}}{log_a b}$$

[இங்கு $\log_b \text{N} = \dfrac{\log_a \text{N}}{\log_a b}$ என்ற சூத்திரம் அடுக்குவிதிகளை மட்டும் பயன்படுத்திக் காணப்பட்டது.]

குறிப்பு : $log_b a = \dfrac{log_a a}{log_a b} = \dfrac{1}{log_a b}$

$$\therefore \quad log_b a \cdot log_a b = 1$$

மேலே கூறப்பட்ட விதிகளைப் பயன்படுத்திச் சில மாதிரிக் கணக்குகள் தரப்படுகின்றன. அடியெண், குறிப்பிடப்படாவிட்டால், எந்த எண்ணை வேண்டுமானாலும் அடியெண்ணுகக்

கொள்ளலாம் என்பதும், கணக்கு முழுவதிலும் ஒரு எண்ணே அடியெண்ணுகக் கொள்ளப்பட்டது என்பதுமே பொருளாகும்.

மாதிரி: $log \sqrt[4]{192}$ ஐ $log\ 2$, $log\ 3$யில் கூறுக.

$$192 = 64 \times 3$$
$$= 2^6 \times 3\ .$$
$$\therefore\ log\ 192 = 6\ glo\ 2 + log\ 3$$
$$log \sqrt[4]{192} = log\ (192)^{1/4} = \tfrac{1}{4}\ log\ 192$$
$$\therefore\ log \sqrt[4]{192} = \frac{6}{4}\ log\ 2 + \frac{1}{4}\ log\ 3 = \frac{3}{2}\ log\ 2 + \frac{1}{4}\ log\ 3$$

மாதிரி: $log \frac{9}{16} + log \frac{40}{81} = log\ 5 - log\ 18$ எனக் காட்டு.

$$log \frac{9}{16} + log \frac{40}{81} = log \frac{9}{16} \times \frac{40}{81}$$
$$= log \frac{5}{18}$$
$$= log\ 5 - log\ 18$$

மாதிரி: $log\ (x+y) = log 3 + \frac{1}{2}\ log\ x + \frac{1}{2}\ log\ y$ என்ருல் $x^2+y^2 = 7\ xy$ என நிறுவுக.

$$log\ (x+y) = log\ 3 + \tfrac{1}{2}\ log\ x + \tfrac{1}{2}\ log\ y$$
$$\therefore\ 2\ log\ (x+y) = 2\ log\ 3 + log\ x + log\ y$$
$$log\ (x+y)^2 = log\ 3^2 \times x \times y$$
$$\therefore\ (x+y)^2 = 9xy$$
$$\therefore\ x^2+y^2 = 7xy$$

மாதிரி: $log_a b = log_b c = log_e a$ என்ருல் $a=b=c$ எனக்காட்டு

$$log_a b = \frac{log_e b}{log_e a};\ log_b c = \frac{log_e c}{log_e b}\ log_c a = \frac{log_e a}{log_e c}$$
$$\therefore\ \frac{log_e b}{log_e a} = \frac{log_e c}{log_e b} = \frac{log_e a}{log_e c}$$

$\therefore$ ஒவ்வொரு விகிதமும் $= \dfrac{log_e b + log_e c + log_e a}{log_e a + log_e b + log_e c}$

$$\therefore\ log_e b = log_e a = log_e c \qquad \therefore\ a = b = c$$

பயிற்சி 11

நிறுவுக :

1. $\log 16 + \log 9 = \log 48 + \log 3$
2. $\log \frac{a}{b} + \log \frac{b}{c} + \log \frac{c}{a} = 0$
3. $\log \frac{49}{4} + \log \frac{9}{35} + \log \frac{10}{21} = \log \frac{3}{2}$
4. சுருக்குக : $\frac{\log x^3}{\log x}$; $\frac{\log x^4}{\log x^7}$; $\frac{\log 1728}{\frac{1}{2}\log 36 + \frac{1}{3}\log 8}$
5. $\log x = 2\log a + 3\log b$ என்றால் x இன் மதிப்பு என்ன?
6. $\log_x{}^2 + \log_x{}^4 + \log_x{}^8 = 12$ என்றால் xஇன் மதிப்பு என்ன ?
7. $\log_4 x + \log_4 x^2 + \log_4 x^6 = 9$; xஇன் மதிப்பு என்ன ?
8. $\frac{1}{\log_a x} + \frac{1}{\log_c x} = \frac{2}{\log_b x}$ என்றால் $b^2 = ac$ எனக் காட்டு.
9. $x : y$இன் விகிதம் காண் : (i) $3^x = 5^y$
   (ii) $\left(\frac{2}{5}\right)^x = \left(\frac{3}{4}\right)^y$
10. $\log_a A \cdot \log_b B = \log_b A \cdot \log_a B$ என நிறுவுக (M.U.)
11. $2\log_g N = r$; $\log_P 2N = q$; $q - r = 4$ என்றால் Nஇன் மதிப்பு என்ன ? (M.U.)
12. $xy^{P-1} = a$; $xy^{q-1} = b$ $xy^{r-1} = c$ என்றால் $(q - r)\log a + (r - P)\log b + (P - q)\log c = 0$ என நிறுவுக. (M.U.)
13. இலாகரிதம் பயன்படுத்தித் தீர்வு காணவும்
    $a^{x+1} = c^{2x} \quad b^{x-1}$
14. $x = \log_p(qr)$; $y = \log_q(rp)$ $z = \log_r(pq)$ என்றால் $\frac{1}{x+1} + \frac{1}{y+1} + \frac{1}{z+1} = 1$ எனக் காட்டு (M.U.)
15. $\frac{1}{\log_a(ab)} + \frac{1}{\log_b(ab)} =$ என நிறுவுக. (M.U.)
16. $\log_a N + \log_{\frac{1}{a}} N = 0$ என நிறுவுக (M.U.)

17. $\log\left(\frac{20}{27}\right) - 2\log\left(\frac{8}{9}\right) + \log\frac{16}{15} = 0$ என நிறுவுக. (M.U.)

18. $a^{\log b - \log c} \cdot b^{\log c - \log a} \cdot c^{\log a - \log b} = 1$ என நிறுவுக.

19. $(xy)^{\log x + \log y} = x^{\log x} \cdot y^{\log y} \cdot x^{2\log y}$ என நிலை நாட்டு.

20. $a^2 + b^2 = c^2$ என்றால் $\frac{1}{\log_{b+c} a} + \frac{1}{\log_{c-b} a} = 2$ என நிரூபிக்க.

5·6. **நடைமுறை இலாகரிதம்** (Common logaritham): இலாகரிதத்தின் அடியெண் (Base) 10 எனக் கொண்டால் அது நடைமுறை இலாகரிதம் எனப்படும். இந்திய எண் குறியீட்டில், இடமதிப்புகள், 10 இன் அடுக்குகளாகிய 10^0, 10^1, 10^2, 10^3 (ஒன்று, பத்து, நூறு, ஆயிரம், அல்லது 10^{-1}, 10^{-2}, (பத்தில் ஒன்று, நூறில் ஒன்று) என வருவதால் நடைமுறைக் கணக்குகளில் 10ஐ அடியெண்ணகக் கொள்கிறோம்.

5·7. **இலாகரிதத்தின் முழு எண்பாகம்** (Charecteristic of the common logarithm):

கீழ்வரும் பட்டியலைக் கவனிக்கவும்.

எண்	10 இன் அடுக்காக எண்	ஆகையால் எண்ணின் இலாகரிதம்
1	10^0	0
10	10^1	1
100	10^2	2
1000	10^3	3
10000	10^4	4

பட்டியலிலிருந்து நாம் தெளிவது.

(i) எண்ணின் மதிப்பு அதிகமாக இலாகரிதத்தின் மதிப்பு அதிகமாகிறது.

(ii) ஆகையால்

1க்கு அதிகமாகவும் 10க்குக் குறைவான எண்ணின்

இலாகரிதம் $(1 < N < 10) = 0 +$ பின்னம்.

$10 < N < 100$ இலாகரிதம் $= 1 +$ பின்னம்.

$100 < N < 1000$ இலாகரிதம் $= 2 +$ பின்னம்.

அதாவது—

ஒரு	சிற்றிலக்க எண்ணின்	இலாகரித	முழு	எண்பாகம்	0
2	சிற்றிலக் எண்ணின்	இலாகரித	முழு	எண்பாகம்	1
3	,,	,,	,,	,,	2
4	,,	,,	,,	,,	3

ஆகையால் எண்ணில் n சிற்றிலக்கங்கள் இருந்தால் அதன் இலாகரித முழு எண்பாகம் $(n-1)$ ஆகும் எனத் தெளிகிறோம்.

ஆகவே (i) எண் தரப்பட்டால் அதைப் பார்த்தும் அதன் இலாகரிதத்தின் முழு எண்ணை எழுத முடியும்.

(ii) மறுதலையாக எண்ணின் இலாகரிதத்தின் முழு எண் பாகம். அந்த எண்ணின் எத்தனை சிற்றிலக்கங்கள் கொண்டது எனவும் கூறமுடியும்.

[**குறிப்பு:** இங்கு ஒன்று, பத்து முதலிய இடங்களில் உள்ள எண்களையே சிற்றிலக்கங்கள் எனக் கொள்கிறோம். 42·68 என்பது 2 சிற்றிலக்க எண் எனவே பொருள். 4, 2, 6, 8 என்பவற்றை இலக்கங்கள் எனவும் தசமப்புள்ளிக்கு இடமாகவுள்ளள எண்களைச் சிற்றிலக்கங்கள் எனவும் கூறுவோம்.]

பயிற்சி (வாய் மொழி) 12

கீழ்வரும் எண்களினது இலாகரிதத்தின் முழு எண் பாகத்தைக் கூறுக.

(i) 45 (ii) 3704 (iii) 4008

(iv) 3·78 (v) 13·707 (vi) 1200.32.

5.8. **இலாகரிதத்தின் பின்னபாகம்:** 42.68 என்ற எண்ணுனது 10க்கு அதிகமாகவும் 100க்குக் குறைவாகமிருப்பதால் அதன் இலாகரிதம் 1 + பின்னபாகம் பின்னபாகம் f ஆகுக.

$$\therefore \quad \log 42{\cdot}68 = 1 + f$$
$$42{\cdot}68 = 10^1 + f$$
$$\therefore \quad 426{\cdot}8 = 10^2 + f$$
$$4268 = 10^3 + f$$
$$4{\cdot}268 = 10^0 + f$$

எண்	இலாகரிதம்
4·268	$0 + f$
42·68	$1 + f$
426·8	$2 + f$
4268	$3 + f$

ஒரே இலக்கங்களை, ஒரே வரிசையில் (ஆனால் வெவ்வேறு இடமதிப்பைப் பெற்று) பெற்றுள்ள எண்களின் இலாகரித பின்னபாகம் (mantissa) ஒன்றாகவே இருக்கும்; மாறாது. எண்ணை 10ஆல் பெருக்கும்போதோ வகுக்கும்போதோ, இலாகரிதத்தின் முழு எண் பாகம் மட்டும் மாறுகிறது. எண்களின் இலக்கங்களோ, அவற்றின் வரிசையோ மாறுவதில்லை. ஆனால் இடமாகவோ வலமாகவோ அவை இருக்கும். இடம் (ஸ்தானம்) மட்டும் மாறுகிறது. அதனால் இலாகரிதத்தின் பின்னபாகம் மாறுவதில்லை.

[**குறிப்பு:** mantissa என்ற லத்தீன் சொல்லுக்குச் 'சில்லரை' என்று பொருளாகும் 42·32 இன் இலாகரிதம் 1ம் சில்லரையும் என்று சொல்லலாம்.]

5.9. **நான்கிலக்க இலாகரிதப் பட்டியல்** (Four figure logarithmic tables): நான்கு இலக்கங்கள் கொண்ட எண்களின் இலாகரிதத்தின் பின்னபாகம் 4 இலக்கத் திருத்தமாக எழுதப் பட்டியல்கள் உள்ளன. இவற்றிற்கு இலாகரிதப் பட்டியல் எனப் பெயர். அத்தகைய பட்டியல் ஒன்றைப் பார்க்கவும். முதல் கலத்தில் ஒன்றன் கீழ் ஒன்றாகத் 10 முதல் 99 வரை முதல் இரண்டு இலக்கங்கள் எழுதப் பெற்று அவற்றின் கீழ் நன்னான்கு இலக்கங்கள் ஒன்றன் கீழ் ஒன்றாகத் தரப்பட்டுள்ளன. இவையே இலாகரிதத்தின் பின்ன பாகங்கள். தலைப்பில் உள்ள 0 முதல் 9 வரை உள்ள எண்கள் மூன்றாவது இலக்கத்தைக் குறிக்கின்றன. (iii) பிறகு இன்னும் ஒன்பது கலங்கள், 1 முதல் 9 வரை இலக்கங்களைத் தலைப்பாகக் கொண்டு காணப்படும். Mean differences—சராசரி வேறுபாடு' எனத் தலைப்பில் குறிக்கப் பெற்றி

ருக்கும். இந்த எண்கள் நான்காவது இலக்கத்தைக் குறிக்கும். முன்னர் கூறிய பின்ன பாகத்துடன் கூட்டவேண்டிய எண்கள் இந்தக் கலங்களில் தரப்பட்டுள்ளன.

ஒரு எண்ணின் இலாகரிதம் காண :

(எ-டு). 47·39 என்ற எண்ணின் இலாகரிதம் காண.

(i) இது இரண்டு சிற்றிலக்க எண். ஆகவே அதன் முழு எண் பாகம் 1.

(ii) **பின்னபாகம் காண :** (*a*) முதலிரு இலக்கங்கள் 47. ஆகவே 47 என்று தொடங்கும் வரியை எடுத்துக் கொள்வோம். (*b*) மூன்றுவது இலக்கம் 3 ; ஆகவே 3 என்ற தலைப்பைக் கொண்ட கலத்தில், எடுத்து கொண்ட வரியில் உள்ள எண்கள் 6749 ஆகவே 4730 என்ற இலக்க வரிசைக் கேற்ற பின்னபாகம் ·6749 ஆகும். (*c*) ஆனல் நான்காவது சிற்றிலக்கம் 9 ஆகையால் ஏற்படும் வேறுபாடு 'சராசரி வேறுபாடு' என்ற தலைப்பில் 9ன் கீழ் தரப்பட்டுள்ளது. 47 என்ற வரிசையில் காணப்படுவது 8; இதை ·9749 உடன் கூட்ட பின்ன பாகம் ·6757 என வருகிறது.

$$\therefore \log 47{\cdot}39 = 1{\cdot}6757$$
$$\log 4{\cdot}739 = 0{\cdot}6757$$
$$\log 4739 = 3{\cdot}6757$$

குறிப்பு : தரப்பட்ட எண்ணில் இலக்கங்கள் நான்குக்கு அதிகமாக இருந்தால் எண்ணை நான்கு இலக்கத் திருத்தமாக எடுத்துக் கொள்ளவேண்டும். 4.7388 எண்ணுனல் 4.739 எனக் கொள்ளவேண்டும். இலக்கங்கள் நான்குக்கு குறைவாக இருந்தால் பூச்சியங்கள் சேர்த்துக் கொள்ளவேண்டும். 82 என்பது எண்ணுனல் 82·00 எனவும் 8 என்பது எண்ணுனல் 8·000 எனவும் கொள்ளவேண்டும்.

பயிற்சி 13

கீழ் வரும் எண்களின் இலாகரிதத்தை எழுதுக.

(i) 3·738 (ii) 6382 (iii) 83·08

(iv) 9 (v) 9·3882.

5·10. **ஒன்றுக்குக் குறைவான எண்களின் இலாகரிதம் :** இதுவரை ஒன்றுக்கு மேற்பட்ட எண்களின் இலாகரிதம் காண்

பதைக் கூறினோம். ·4739 என்ற பின்னத்தின் இலாகரிதம் என்ன எனப்பார்ப்போம்.

$$\cdot 4739 = \frac{4 \cdot 739}{10}$$

ஆனால் $\log\ 4\cdot 739 = 0\cdot 6757$

$$\therefore\ 4\cdot 739 = 10^{0 \cdot 6757}$$

$$\therefore\ \cdot 4739 = \frac{10^{0\cdot 6757}}{10}$$

$$= 10^{-1+\cdot 6757}$$

$$\therefore\ 4739 = 10^{-1+\cdot 6757} \qquad \therefore\ \log\ 4739 = 1 + \cdot 6757$$

$$\cdot 04739 = 10^{-2+\cdot 6757} \qquad \therefore\ \log\ \cdot 04739 = -2+\cdot 6757$$

$$\cdot 004739 = 10^{-3+\cdot 6757} \qquad \therefore\ \log\ \cdot 004739 = -3+\cdot 6757$$

ஆகவே இலாகரிதத்தில் (i) பின்னபாகம் ஒரே வரிசை இலக்க முடை எண்களுக்கு ஒன்றாகவே இருக்கிறது. இதைப் பட்டியலி லிருந்து எழுதமுடியும். (ii) பின்னபாகம் நேரெண்ணாகவே இருக்கிறது (iii) முழுஎன் பாகம் எதிரெண்ணாகும் (iv) பின்னத் தில் எத்தனை பூச்சியங்கள் தசமப் புள்ளியை அடுத்து இருக்கிறதோ அத்துடன் 1ஐக் கூட்ட முழு எண்பாகம் வருகிறது. அல்லது பின்னபாகம் nவது தசமத்தானத்தில் தொடங்கினால் முழு எண் $-n$ ஆகும். $-3+\cdot 6757$ என்பதை $\bar{3}\cdot 3757$ என்று எழுத வேண்டும். சொல்லும்போது Bar 3 புள்ளி 3757 எனச் சொல்ல வேண்டும்.

இலாகரிதம் தரும் எண் (anti logarithm): ஒரு எண் தரப் பட்டால் அதன் இலாகரிதம் எழுதும் முறையைக் கூறினோம். இனிமேல் இலாகரிதம் தரப்பட்டால், அதன் எண் யாது என்பதைக் காண்போம். இத்தகைய எண்ணை எதிர் இலாகரிதம் (anti logarithm) என்போம்.

5·11. **'எதிர் இலாகரித'ப் பட்டியல்:** இதில் இலாகரிதப் பட்டியலைப் போலவே உள்ளது.

ஒரு எண்ணின் இலாகரிதம் 1·6757 எண் என்ன என்று காண (i) பின்னபாகம் ·6757 ·67 என்றும் தொடங்கும் வரியில் 5 என்ற தலைப்பைக் கொண்ட கலத்தில் 4732 எனக் காணப் படுகிறது.

(ii) 'சராசரி வேறுபாடுகள்' என்ற தலைப்பில் 7 என்பதற்குக் கீழே இதே வரியில் 7 எனக் காண்கிறது. இதை 4732 உடன் கூட்ட 4739. இவை மய எண்ணின் இலக்கங்கள். முழு எண் பாகம் 1 ஆதலால் சிற்றிலக்கங்கள் இரண்டு ஆகும். ஆகவே இரண்டு இலக்கங்கள் தள்ளித் தசமப்புள்ளி வைக்க எண் 47·39. இதன் இலாகரிதம்தான் 1·6757.

இலாகரிதம் $\bar{2}\cdot 6757$ என்றால் 4739இல் 4 தசமப்புள்ளிக்குப் பிறகு 2வது தானமாக இருக்கவேண்டும். ஆகவே எண் ·04739 ஆகும்.

பயிற்சி 14

கீழ்க்கண்ட இலாகரிதங்களையுடைய எண்களைக் காண்க.

(i) $3\cdot 3107$ (ii) $2\cdot 0568$ (iii) $1\cdot 0057$

(iv) $\bar{2}\cdot 3608$ (v) $\bar{1}\cdot 0578$ (vi) $\bar{4}\cdot 0057$.

இலாகரிதங்களைக் கூட்ட, கழிக்க, பெருக்க வகுக்கச் செய்யும் போது பின்னபாகம் நேரெண்ணாக இருக்கும்படிச் செய்ய வேண்டும்.

(எ-டு) $\bar{3}\cdot 4321$ இலிருந்து $\bar{1}\cdot 9198$ ஐக் கழிக்க

$$\begin{array}{r} \bar{3}\cdot 4321 \\ 1\cdot 9198 \\ \hline \bar{3}\cdot 5123 \\ \hline \end{array}$$

$\dfrac{\bar{3}\cdot 5785}{5}$ எவ்வாறு காண்பது.

$\bar{3}$, 5ஆல் வகுபடாது

$$\therefore \quad \frac{\bar{3}\cdot 5785}{5} = \frac{\bar{5}+2\cdot 5785}{5} = \bar{1}\cdot 5157$$

எனக் காணவேண்டும். உடனே மனத்தில் செய்து, விடை எழுதப் பழகவும்.

...ரிக் கணக்குகள்

மாதிரி 1.

சுருக்குக : $\dfrac{31{\cdot}46 \times {\cdot}0235}{12{\cdot}378}$

(i) நான்கு இலக்கத் திருத்தமாக எழுதுக.

$$N = \frac{31{\cdot}46 \times {\cdot}0235}{12{\cdot}38}$$

$\log N = \bar{2}{\cdot}7761$

$\therefore N = {\cdot}05971$

எண்	இலாகரிதம்
31·46	1·4977
·0235	$\bar{2}$·3711
தொகுதி	$\bar{1}$·8688
12·38	1·0927
கழிக்க : log N	$\bar{2}$·7761

மாதிரி 2.

·0675 இன் கன மூலம் காண்க

$$N = ({\cdot}0675)^{1/3}$$

$$\therefore \log N = \tfrac{1}{3} \log {\cdot}0675$$

$$= \tfrac{1}{3} \times \bar{2}{\cdot}8295$$

$$= \bar{1}{\cdot}6098 \text{ (திருத்தமாக)}$$

$$\therefore N = {\cdot}4072.$$

[குறிப்பு : 3ஆல் வகுக்க $\bar{2}{\cdot}8295$ என்பதை $-3 + 1{\cdot}8295$ எனக் கொண்டு மனத்தில் வகுக்கிறோம்.]

மாதிரி : எத்தனை ஆண்டுகளில் 6% கூட்டுவட்டி வீதம் ஒரு அசல் இரண்டு மடங்காகும்.

சூத்திரம் $A = P\left(1 + \dfrac{r}{100}\right)^n$. $A = 2P;\ r = 6.$

$$\therefore 2P = P\ (1{\cdot}06)^n$$

$$\therefore 2 = (1{\cdot}06)^n$$

$$\therefore \log 2 = n \log (1{\cdot}06)$$

$$\therefore n = \frac{\log 2}{\log 1{\cdot}06} = \frac{{\cdot}3010}{{\cdot}0253}$$

$$\therefore \quad n = \frac{3010}{253}$$

$$\begin{aligned} \log 3010 &= 3 \cdot 4786 \\ (-) \log 253 &= 2 \cdot 4031 \\ \therefore \log n &= 1 \cdot 0755 \end{aligned}$$

$$\therefore \quad n = 11{\cdot}90.$$

∴ 12 ஆண்டுகளில் ஒரு அசல் 6% கூட்டு வட்டி வீதம் வட்டியுடன் இருமடங்காகும்.

மாதிரி. 2^{64} இன் மதிப்பு எத்தனைத் தானங்கள் கொண்ட எண்ணாகும்.

$$N = 2^{64}$$

$$\therefore \log N = 64 \log 2 = 64 \times {\cdot}3010$$

$$= 19{\cdot}2640$$

∴ முழு எண் பாகம் 1a; ஆகையால் 2^{64} என்பது 20 தான எண்ணாகும்.

மாதிரி: எந்தத் தசமத்தானத்திலிருந்து 3^{-14} இன் மதிப்பில் இலக்கங்கள் தொடங்குகின்றன.

$$N = 3^{-14} = \frac{1}{3^{14}} \qquad \dots 00$$

$$\therefore \log N = \log 1 - 14 \log 3 =$$

$$= 0 - [14 \times {\cdot}4771]$$

$$= -(6{\cdot}6794) = \bar{7} \cdot 3206$$

பயிற்சி 14 (a)

1. கீழ் வரும் எண்களின் இலாகரிதத்தை எழுதுக:
   $2{\cdot}13$, $5{\cdot}46$, ${\cdot}6137$, ${\cdot}06137$, ${\cdot}00523$.

2. கீழ் வரும் இலாகரிதங்கள் உள்ள எண் யாவை?
   0.8974, $1{\cdot}3572$, $3{\cdot}4135$, $\bar{1} \cdot 2222$
   $\bar{1}{\cdot}5794$, $\bar{2}{\cdot}0132$, $\bar{3}{\cdot}0052$.

3. **சுருக்குக:** (பின்னபாகம் நேரெண்ணாக இருக்கும்படி)
   (i) $3{\cdot}2 - \bar{1}{\cdot}6$ (ii) $\bar{2}\,321 - 5.871$
   (iii) $\bar{1}{\cdot}1208 - \bar{2}{\cdot}9817$ (iv) $\bar{5}{\cdot}72 \times 6$
   (v) $\bar{2}{\cdot}831 \times 3$ (vi) $\bar{1}{\cdot}6312 \div 2$ (vii) $\bar{5}{\cdot}814 \div 2$
   (viii) $\bar{1}{\cdot}9 \times -2$ (ix) $\bar{4}{\cdot}8 \times -\frac{1}{2}$ (x) $-0.4 \times \bar{3}{\cdot}7$

4. மதிப்புக் காண்க.

(i) $7{\cdot}682 \times 1.458$ (ii) $58{\cdot}42 \times 12{\cdot}76$

(iii) $387{\cdot}1 \times 4{\cdot}189$ (iv) $4{\cdot}823 \times 5{\cdot}718 \times 114.9$

5. (i) $(6{\cdot}835)^2$ (ii) $(4{\cdot}296)^3$ (iii) $({\cdot}0412)^2$

6. (i) $\sqrt{15{\cdot}4}$ (ii) $\sqrt[3]{{\cdot}783}$ (iii) $(25{\cdot}19)^{\frac{3}{4}}$

7. சுருக்குக : (i) $\dfrac{0{\cdot}3152 \times 0{\cdot}4287}{{\cdot}0678}$

(ii) $\dfrac{(6{\cdot}215)^{3/5} \quad ({\cdot}02378)^{2/3}}{(45{\cdot}67)^{1/2} \quad ({\cdot}002135)^{3/4}}$ (M.U.)

8. 3^{78} இல் எத்தனைச் சிற்றிலக்கங்கள் உள்ளன. (M.U.)

9. $\overline{2}^5 \times \overline{3}^4$ என்பதைத் தசம பின்னமாக எழுதினால் முதல் சிற்றிலக்கம் இருக்கும் தானம் எது? (M.U.)

10. $log\ 3 = {\cdot}47712$ என்றால் 3^{43} இல் எத்தனைச் சிற்றிலக்கங்கள் உள்ளன? 3^{-43} யைத் தசம பின்னமாகக் கூறத் தசமப் புள்ளிக்குப் பிறகு எத்தனை பூச்சியங்கள் உள்ளன? (M.U.)

11. $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$ என்ற சூத்திரத்தில் $l = 285{\cdot}4$ $g = 32$, $\pi = 3{\cdot}1416$ என்றால் T இன் மதிப்பு என்ன.

12. எத்தனை குறைந்த ஆண்டுகளில் ஒரு அசல் 9% கூட்டு வட்டி வீதம் வட்டியுடன் கூட மூன்று மடங்காகும்.

13. 200 ஈயக் குண்டுகள் தண்ணீருள்ள ஓர் அளவு சாடியில் இட, அவை 3.4 க.செ.மீ. நீரை விலக்குகின்றன என்றால் அவற்றின் விட்டம் என்ன?

14. 112 செ.மீ. நீளமுள்ள கம்பிச் சுருளை நீருள்ள அளவு சாடியில் இட்டால் 4.5 செ.மீ. நீரை விலக்குகிறது. கம்பியின் குறுக்களவு என்ன?

6. இருபடிச் சமன்பாடு
(Quadralic Equation)

இருபடிச் சமன்பாட்டின் பொது உருவம் $ax^2+bx+c=o$ என்பதைக் கீழ் வகுப்பில் படித்திருப்பீர்கள். இதில் மாறி (Variable) x ஆகும். அதன் மிக அதிகமானபடி 2; அதனால் இந்தச் சமன்பாடு இருபடிச் சமன்பாடு எனப் பெயர் பெற்றது.

6·1. $ax^2+bx+c=0$ **எனும் சமன்பாட்டின் மூலங்களைக் காண:** $ax^2+bx+c=0$

$$\therefore \quad x^2+\frac{b}{a}x=-\frac{c}{a}$$

$$\therefore \quad \left(x+\frac{2a}{b}\right)^2=\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}$$

$$=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$$

$$\therefore \quad x+\frac{b}{2a}=+\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \text{ அல்லது } \frac{-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$\therefore \quad x=\frac{-b}{2a}+\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \text{ அல்லது } \frac{-b}{2a}-\frac{\sqrt{b^2-4c}}{2a}$$

$$\therefore \quad x=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \text{ அல்லது } \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

என xக்கு இரண்டு மதிப்புக்கள் வருகின்றன. ஆகவே **இருபடிச் சமன்பாட்டிற்கு இரண்டு மூலங்கள் உள்ளன** என அறிகிறோம்.

$ax^2+bx+c=0$ எனும் சமன்பாட்டின் மூலங்கள் $\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ **என்பது** சூத்திரமாகும்.

6·2. **மூலங்களும், குணகங்களும் :**

$ax^2+bx+c=0$ எனும் சமன்பாட்டின் மூலங்கள் 'α', 'β' ஆகுக

அப்போது $\alpha \quad \dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$; $\beta=\dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$$\therefore \quad \alpha+\beta=\frac{-2b}{2a}; \quad \alpha\,\beta=\frac{(-b)^2-(\sqrt{b^2-4ac})^2}{4a^2}$$

$$=-\frac{b}{a}=\frac{b^2-(b^2-4ac)}{4\,a^2}=\frac{4ac}{4c}=\frac{c}{a}$$

$$\alpha+\beta=-\frac{b}{a} \quad ; \quad \alpha\,\beta=\frac{c}{a}$$

$ax^2+bx+c=0$ எனும் இருபடிச் சமன்பாட்டில்

மூலங்களின் கூடுதல் $=-\dfrac{b}{a}$

மூலங்களின் பெருக்கற்பலன் $= \dfrac{c}{a}$

இங்கு மூலங்களின் மதிப்புக்களைப் பயன்படுத்தி, மூலங்களுக்கும் குணகங்களுக்கும் இடையேயுள்ள தொடர்புகளைக் கண்டோம்.

மாற்று வழி: $ax^2+bx+c=0$ எனும் சமன்பாட்டின் மூலங்கள் α, β, ஆகுக. $f(x)=ax^2+bx+c$, ஆனால் இதன் பொருள் $f(\alpha)=0$; $f(\beta)=0$ என்பதாம் ஆகவே மீதித்தேற்றத்தின்படி $(x-\alpha)$, $(x-\beta)$ என்பவை $f(x)$இன் காரணிகள் ஆகும். இவைகளின் பெருக்கற்பலன் இருபடிக்கோவை; $f(x)$ம் இருபடிக்கோவை, ஆகவே x^2இன் குணகமான 'a' என்பதும் ஒரு காரணி.

$\therefore \quad ax^2+bx+c \equiv a(x-\alpha)\,(x-\beta)$ என் முற்றொருமையாக வருகிறது.

$$\therefore \quad ax^2+bx+c \quad =a\,\{x^2-\overline{\alpha+\beta}x+\alpha\,\beta\}$$

$$\therefore \quad x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=x^2-\overline{\alpha+\beta}x+\alpha\,\beta$$

$\therefore \quad x$இன் குணகங்கள் சமம், மாறிலி எண்களும் சமம்

$$-\quad(\alpha+\beta)=\frac{b}{a}$$

$$\alpha\,\beta=\frac{c}{a}$$

$$\therefore \quad (\alpha+\beta)=-\frac{b}{c} \quad \alpha\,\beta=\frac{c}{a}$$

6.3. மூலகங்களின் சமச் சீர்க்கோவைகளின் மதிப்பைக் குணகங்களில் காண. 'α, β' என்பவை $ax^2 + bx + c = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் மூலங்களானால் 'α, β' கொண்ட சமச்சீர்க் கோவைகளின் மதிப்பைச் சமன்பாட்டில் வரும், a, b, c என்ற குணகங்களில் காணவேண்டும்.

(i) '$\alpha + \beta$' என்பது ஒரு படிச்சமச்சீர்க்கோவை

$(\alpha + \beta) = -\dfrac{b}{a}$ என அறிவோம்.

(ii) $(\alpha^2 + \beta^2)$, '$\alpha\ \beta$' என்பவை இருபடிச் சமச்சீர்க் கோவைகளில் வரும்.

$$\alpha + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\,\alpha\,\beta = \frac{b^2}{a^2} - 2\frac{c}{a}$$

$\therefore\ \alpha^2 + \beta^2 = \dfrac{b^2 - 2ac}{a^2}$ என வருகிறது.

(iii)
$$(\alpha^3 + \beta^3) = (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\,\beta\,(\alpha + \beta)$$
$$= -\frac{b^3}{a^3} - 3\frac{c}{a}\left(-\frac{b}{a}\right)$$
$$= -\frac{b^3}{a^3} + \frac{3bc}{a^2}$$
$$= \frac{3abc - b^3}{a^3}$$

(iv)
$$\alpha^4 + \beta^4 = (\alpha^2 + \beta^2)^2 - 2x^2\,\beta^2$$

ஆனல் $\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\,\alpha\,\beta = \dfrac{b^2}{o^2} - 2\dfrac{c}{a}$

$$\therefore\quad \alpha^2 + \beta^2 = \frac{b^2 - 2\,ac}{a\ 2}$$

$$\therefore\quad \alpha^4 + \beta^4 = \frac{(b^2 - 2\ ac)^2}{a\ 4} - \frac{2c^2}{a^2} =$$

$$\therefore\quad \alpha^4 + \beta^4 = \frac{(b^2 - 2ac)^2 - 2a^2c^2}{a^4}$$

மாதிரி : α, β என்பவை $x^2 - Px + q = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் மூலகங்கள். $\alpha^n + \beta^n = V_n$ எனக் குறித்தால், $V_{n+1} = PV_n - q\,V_{n-1}$ எனக் காட்டு; இதன் வழி, அல்லது வேறு வழி, $\alpha^5 + \beta^5$ என்பதன் மதிப்பைக் காண்க.

$$V_{n+1} = \alpha^{n+1} + \beta^{n+1} = (\alpha+\beta)(\alpha^n + \beta^n) - \alpha\beta^n - \beta\,\alpha^n$$

$$\therefore\quad V_n = (\alpha+\beta)\,V_n - \alpha\,\beta\,(\alpha^{n-1} + \beta^{n-1})$$

ஆனால் $\alpha + \beta = r \quad \alpha\,\beta = q$

$$\therefore\quad V_n = r\,V_n - q\,V_{n-1}$$

$$\alpha^5 + \beta^5 = V_5$$

ஆனால் $V_5 = r\,V_4 - q\,V_3$

$$= r\,(\alpha^4 + \beta^4) - q\,(\alpha^3 + \beta^3)$$

ஆனால் $\alpha^4 + \beta^4 = (\alpha^2 + \beta^2)^2 - 2\,\alpha^2\,\beta^2$

$$\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\,\alpha\,\beta = P^2 - 2q$$

$$\therefore\quad V_4 = \alpha^4 + \beta^4 = (r^2 - 2q)^2 - 2q^2$$
$$= P^2 - 4P^2q + 4P^2 - 2q^2$$
$$= P^2 - 4P^2q + 2q^3$$

$$V_3 = (\alpha^3 + \beta^3) = (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\,\beta\,(\alpha + \beta)$$

$$\therefore\quad V\,3 = P^3 - 3\,qP.$$

$$\therefore\quad V5 = r\,(P^4 - 4P^2q + 2q^2) - q\,(P^3 - 3qP)$$
$$= P^5 - 4P^3q + 2Pq^2 - P^3q + 3Pq^2$$
$$= P^5 - 5P^3q + 5rq^2$$

[குறிப்பு: $V_{n+1} = rV_n - qV_{n-1}$ என்பதைத் தொடர்ந்து பயன்படுத்தியும் காணலாம்.]

$$V_2 = rV_1 - qV_0 \quad = P^2 - 2q \qquad \left[\begin{array}{l} \alpha + \beta = r \\ \alpha^0 + \beta^0 = 2 \end{array}\right]$$

$$V_3 = rV_2 - qV_1$$
$$= P_3 - 2\,Pq - Pq$$
$$= (P^3 - 3\,Pq)$$

$$V_4 = PV_3 - q\,V_2$$
$$= P^4 - 3\,P^2q - P^2q + 2q^2$$
$$= P^4 - 4\,P^2q + 2q^2$$

$$V_5 = rV_4 - q\,V_3$$
$$= P^5 - 4\,P^3q + 2\,Pq^2 - P^3q + 3\,Pq^2$$

$$\therefore\quad \alpha^5 + \beta^5 = P^5 - 5P^3q + 5\,Pq^2\,]$$

மாதிரி: α, β என்பவை $ax^2+bx+c=0$ என்பதன் மூலங்களானால் $(a\alpha+b)^{-2}+(a\beta+b)^{-2}$ என்பதன் மதிப்பைக் காணவும்.

'α' என் $ax^2+bx+c=0$ என்பதன் மூலமானதால்

$$a\alpha^2+b\alpha+c=0$$

$$\therefore \alpha(a\alpha+b) = -c$$

$$\therefore \frac{1}{a\alpha+b} = -\frac{\alpha}{c}$$

இதேபோல $\dfrac{1}{a\beta+b} = -\dfrac{\beta}{c}$

$$\therefore (a\alpha+b)^{-2}+(a\beta+b)^{-2}\ \frac{\alpha^2}{c^2}\times\frac{\beta^2}{c^2}=\frac{\alpha^2+\beta^2}{c^2}$$

ஆனால் $\alpha+\beta = -\dfrac{b}{a}$ $\alpha\beta = \dfrac{c}{a}$

$$\alpha^2+\beta^2 = (\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$$

$$= \frac{b^2}{a^2}-2\frac{c}{a}$$

$$= \frac{b^2-2ac}{a^2}$$

$$\therefore (a\alpha+b)^{-2}+(a\beta+b)^{-2} = \frac{(b^2-2ac)}{a^2c^2}$$

பயிற்சி 15

'α' 'β' என்பவை $ax^2+bx+c=0$ என்ற சமன்பாட்டின் மூலங்களானால், கீழ்க் கண்டவற்றின் மதிப்பைக் காண்க.

1. $\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}$; 2. $\dfrac{1}{\alpha^2}+\dfrac{1}{\beta^2}$ 3. $\dfrac{\alpha}{\beta}+\dfrac{\beta}{\alpha}$

4. $\dfrac{\alpha}{\beta^2}+\dfrac{\beta}{\alpha^2}$ 5. $\dfrac{1}{\alpha+2\beta}+\dfrac{1}{\beta+2\alpha}$ 6. $\alpha\beta^3+\alpha^3\beta$

7. $(a\alpha+b)^{-3}+(a\beta+b)^{-3}$ 8. $(b\alpha+c)^3+(b\beta+c)^3$

9. $(b\alpha+c)(b\beta+c)$ 10. $(a\alpha+b)(a\beta+b)$.

11. α, β என்பவை $x^2-P(x+1)-c=0$ என்ற சமன்பாட்டின் மூலங்களானால் $(\alpha+1)(\beta+1)=1-c$ எனக் காட்டு.

12. α, β என்பவை $x^2 - rx + q = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் மூலங்கள் α^8, β^8 என்பவை $x^2 - ax + b = 0$ என்ற சமன்பாட்டில் மூலங்கள் என்ருல் a, bயின் மதிப்புக்களைத் தனித்தனியே p, qயின் சார்பலன்களாகக் கூறுக.

13. α, β என்பவை $x^2 - rx + r^2 = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் மூலங்களாஞல் $\dfrac{\alpha}{\alpha - r} + \dfrac{\beta}{\beta - r} = 1$ எனக் காட்டு.

14. α, β என்பவை $ax^2 + 2bx + c = 0$ என்ற சமன் பாட்டின் மூலங்கள். $\alpha + \delta, \beta + \delta$ என்பவை $Ax^2 + 2Bx + C = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் மூலங்கள் என்ருல் $\dfrac{b^2 - ac}{a^2} = \dfrac{B^2 - Ac}{A^2}$ என நிறுவுக.

15. α, β என்பவை $x^2 + ax + b = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் மூலங்கள்; γ, δ என்பவை $x^2 + ax + c = 0$ என்றதன் மூலங்கள் என்ருல் $(\alpha - \gamma)(\alpha - \delta) = (\beta - \gamma)(\beta - \delta) + a + c$ எனக் காட்டு.

6.4 **குறிப்பிட்ட மூலங்களுடைய சமன்பாடு காணல்:** ஒரு சமன்பாட்டின் மூலங்கள் y_1, y_2 எனும் இரு எண்களாஞல், அந்தச் சமன்பாடு $x^2 - (y_1 + y_2)x + y_1 y_2 = 0$ என அறிவோம்.

'x'இன் குணகம் = − எண்களின் கூடுதல்
நிலை எண் = எண்களின் பெருக்கற் பலன்
[x^2இன் குணகம் = 1]

மாதிரி. α, β என்பவை $ax^2 + bx + c = 0$ என்ற சமன் பாட்டின் மூலங்களாஞல் $(\alpha^2 + \beta^2), \left(\dfrac{1}{\alpha^2} + \dfrac{1}{\beta^2}\right)$ என்ற மூலங் களுடைய சமன்பாட்டைக் காணவும்.

'y_1' 'y_2' என்ற எண்களை மூலங்களாகவுடைய சமன்பாடு $x^2 - (y_1 + y_2)x + y_1 y_2 = 0$

இங்கு $y_1 = \alpha^2 + \beta^2 \quad y_2 = \dfrac{1}{\alpha^2} + \dfrac{1}{\beta^2} = \dfrac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha^2 \beta^2}$ ஆஞல் α, β என்பவை $ax^2 + bx + c = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் மூலங் களாகையால் $\alpha + \beta = -\dfrac{b}{x} \quad \alpha\beta = \dfrac{c}{a}$

$$\therefore \quad y_1 = (\alpha^2 + \beta^2) = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = \frac{b^2 - 2ac}{a^2}$$

$$y_2 = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha^2 \beta^2} = \frac{(b^2 - 2\,ac)}{a^2} \times \frac{a^2}{c^2} = \frac{(b^2 - 2\,ac)}{c^2}$$

∴ சமன்பாடு

$$x^2 - x\left\{\frac{b^2 - 2\,ac}{a^2} + \frac{b^2 - 2\,ac}{c^2}\right\} + \frac{(b^2 - 2\,ac)^2}{a^2\,c^2} = 0$$

$$\therefore\ a^2\,c^2\,x^2 - x\,(b^2 - 2\,ac)\,(a^2 + c^2) + (b^2 - 2\,ac)^2 = 0$$

[குறிப்பு: இங்கு y_1, y_2 இரண்டையும் தனித்தனியே காண முடிந்தது].

மாதிரி: α, β என்பவை $ax^2 + bx + c = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் மூலங்களானால் $\frac{1}{\alpha^2}$, $\frac{1}{\beta^2}$ என்ற எண்களை மூலங்களாகவுடைய சமன்பாட்டைக் காண்க:

y_1 y_2 என்ற எண்களை மூலங்களாகவுடைய சமன்பாடு

$$x^2 - (y_1 + y_2)\,x + y_1\,y_2 = 0$$

$$y_1 = \frac{1}{\alpha^2} \quad y_2 = \frac{1}{\beta^2} \qquad \therefore\ y_1 + y_2 = \frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2} = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha^2\,\beta^2}$$

$$y_1\,y_2 = \frac{1}{\alpha^2\,\beta^2}$$

ஆனால் $\alpha + \beta = -\frac{b}{a} \quad \alpha\,\beta = \frac{c}{a}$

$$\therefore\ \alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\ \alpha\,\beta = \frac{(b^2 - 2ac)}{a^2}$$

$$\therefore\ y_1\,y_2 = \frac{(b^2 - 2ac)}{a^2} \cdot \frac{a^2}{c^2} = \frac{(b^2 - 2ac)}{c^2}$$

$$y_1\,y_2 = \frac{a^2}{c^2}$$

$$\therefore\ \text{சமன்பாடு}\ x^2 - \frac{(b^2 - 2ac)}{c^2}\,x + \frac{a^2}{c^2} = 0$$

$$\therefore\ c^2\,x^2 - (b^2 - 2ac)\,x + a^2 = 0$$

[குறிப்பு: இங்கு y_1, y_2 என்பவற்றைத் தனித் தனியாகக் காணமுடியாது. ஆகவே $y_1 + y_2$ என்பவற்றைக் காணவேண்டி வந்தது].

பயிற்சி 16

1. α, β என்பவை $x^2 - 3x + 5 = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் மூலங்களானால் $\alpha^2 + \beta$, $\beta^2 + d$, என்று எண்களை மூலங்களாகவுடைய சமன்பாட்டின் மூலங்களைக் காண்க. (M.U.)

175024

2. 'r' 'q' என்பவை $5x^2-x-2=0$ என்ற சமன்பாட்டின் மூலங்கள். $\frac{3}{p}, \frac{3}{q}$ என்ற எண்களை மூலங்களாகவுடைய சமன்பாட்டைக் காண்க. (M.U.)

3. α, β என்பவை $ax^2+bx+c=0$ என்ற சமன்பாட்டின் மூலங்களானால், கீழ் வரும் எண்களை மூலங்களாகவுடைய சமன்பாடுகளைக் காண்க.

(i) α^2, β^2 (ii) $(\alpha+2\beta), (2\alpha+\beta)$ (iii) $\left(2\alpha+\frac{1}{\beta}\right)$ $\left(2p+\frac{1}{\alpha}\right)$ (vi) $\alpha^2\beta, \alpha\beta^2$ (v) $(\alpha-\beta)^2, (\alpha+\beta)^2$

(vi) $(m\alpha+n\beta), (m\beta+n\alpha)$ (vii) $\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2$, $\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2$.

4. $2x^2+2(m+n)x+m^2+n^2=0$ என்ற சமன்பாட்டின் மூலங்களின் கூடுதலின் வர்க்கத்தையும், வித்தியாசத்தின் வர்க்கத்தையும் மூலங்களாகவுடைய சமன்பாட்டைக் காண்க.

5. 'r' 'g' என்பவை $x^2+ax+b=0$ என்ற சமன்பாட்டின் மூலங்களானால் $(P-1)^2$, $(q-1)^2$ என்ற எண்களை மூலங்களாக வுடைய சமன்பாட்டைக் காண்க.

6·5. **தொடர்புடை மூலங்கள்.** $ax^2+bx+c=0$ என்ற சமன்பாட்டின் மூலங்கள் ஒன்றற்கொன்று குறிப்பிட்ட தொடர் புடையனவாக இருக்கவேண்டுமானால், குணகங்கள் a, b, c இடையே தொடர்பு இருக்க வேண்டும். அது என்ன என்று காண, பொது முறை பின் வருமாறு:

$$\alpha+\beta=-\frac{b}{a};\quad \alpha\beta=\frac{c}{a}$$

இத்துடன் $f(\alpha, \beta)=0$ எனவும் உள்ளது. இந்த மூன்று சமன்பாடுகளிலிருந்து α, βவை நீக்க. a, b, c இடையே நிலவும் தொடர்பு வரும்.

[குறிப்பு: 'α' என்பது $ax^2+bx+c=0$ என்பதன் மூல மாகையால் $a\alpha^2+b\alpha+c=0$ எனும் சமன் பாட்டையும் பயன்படுத்தலாம்].

மாதிரி: $ax^2+bx+c=0$ என்ற சமன்பாட்டின் மூலங்கள் $m:n$ என்ற விகிதத்தில் இருக்கக் குணகங்களின் தொடர்பு என்ன?

மூலங்கள் $ma,\ na$ ஆகுக

$\therefore$ அவற்றின் கூடுதல் $(m+n)\,a \quad = -\dfrac{b}{a}$

அவற்றின் பெருக்கற் பலன் $mn\ a^2 \quad = \dfrac{c}{a}$

ஆனல் $(m+n)^2\ a^2 \quad = \dfrac{b^2}{a^2}$

$$\therefore \frac{mn}{(m+n)^2} = \frac{ac}{b^2}$$

$$\therefore (m+n)^2\,ac = b^2mn$$

மாதிரி : $ax^2 + bx + c = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் மூலங்களில் ஒன்று மற்றதன் வர்க்கமாக இருக்கக் குணகங்களிடையேயுள்ள தொடர்பு என்ன?

மூலங்கள் $\alpha,\ \alpha^2$ ஆகுக

$$\therefore \alpha^3 = \frac{c}{a} \qquad \therefore \alpha = \left(\frac{c}{a}\right)^{1/3}$$

ஆனல் $\alpha^2 + \alpha = -\dfrac{b}{a} \qquad \therefore \alpha^2 + \alpha + \dfrac{b}{a} = 0$

$$\therefore \left(\frac{c}{a}\right)^{2/3} + \left(\frac{c}{a}\right)^{1/3} + \frac{b}{a} = 0$$

$$\therefore a^{1/3}\ c^{2/3} + a^{2/3}\ c^{1/3} + b = 0$$

$$\therefore a^{1/3}\ c^{1/3}\left(c^{1/3} + a^{1/3}\right) = -b$$

$$\therefore ac\left\{c + a + 3\,a^{1/3}\ c^{1/3}\left(c^{1/3} + a^{1/3}\right)\right\} = -b^3$$

$$\therefore ac\left\{c + a - 3b\right\} = -b^3$$

$$\therefore ac\,(a+c) + b^3 - 3abc = 0$$

[வேறு பல வழிகளும் உண்டு].

பயிற்சி 17

1. $4x^2 - 8x + c = 0$ என்ற சமன்பாட்டில் ஒரு மூலம் மற்றதைப் போல 3 மடங்கானல் cயின் மதிப்பு என்ன?

2. $9\,x^2 + mx - 2 = 0$ என்ற சமன்பாட்டில் ஒரு மூலம் மற்றதைப் போல இரண்டுமடங்கானல் mஇன் மதிப்பு என்ன?

3. $(2c+1)\,x^2 - /\,1cx + 3c + 2 = 0$ என்ற சமன்பாட்டில் மடங்குகள் $10 : 1$ என்ற விகிதமாயின் cயின் மதிப்பு என்ன?

4. $ax^2+bx+c=0$ என்ற சமன்பாட்டின் மூலங்கள் (i) சமமாகவும் ஆனால் குறியில் மாறாகவும் இருக்க (ii) ஒன்று மற்றதன் தலைகீழ் பின்னமாக இருக்க, குணங்களிடையே நிலவும் நியதி என்ன ?

5. $x^2-rx+q=0$ என்ற மூலங்களின் வித்தியாசம் 1 ஆனால் $r^2=4q+1$ எனக் காட்டு.

6. $\frac{1}{x+p}+\frac{1}{x+q}=\frac{1}{r}$ என்ற சமன்பாட்டின் மூலங்கள் ஒன்றிற்கொன்று நேர்மாறான குறிகளையும் ஆனால் சம அளவுள்ளவைகளாகவும் ஆனால் அவற்றின் பெருக்கற் பலன் $-\frac{(p^2+q^2)}{2}$ எனக் காட்டு.

7. $ax^2+bx+c=0$ என்ற சமன்பாட்டின் மூலங்கள் $m:n$ என்ற விகிதத்திலிருந்தால் $\sqrt{\frac{m}{n}}+\sqrt{\frac{n}{m}}+\sqrt{\frac{l}{a}}=0$ என நிறுவுக.

8. $ax^2+bx+c=o$; $a^1x^2+b^1x+c^1=0$ என்ற இரண்டு சமன்பாடுகளின் மூலங்களில் ஒரு மூலம் பொதுவாக இருக்கக் குணகங்களிடையே நிலவும் நியதி என்ன ?

6·6. **மூலங்களின் தன்மை : எண்களின் வகை :** $\sqrt{64}=8$ என அறிவோம். ஆனால் $\sqrt{-64}$ என்ன ? -64 என்பதை -1×64 எனலாம். அப்போது $\sqrt{-64}=\sqrt{-1\times 64}=\sqrt{-1}\times\sqrt{64}=\sqrt{-1}\times 8\sqrt{-1}$ என்பது புது வகை எண். இதைப் பொய் எண் (Imaginary number) என்போம். மற்ற எண்களாகிய 2, 3 என்பவைகளை நீளத்தால் குறிக்கலாம். அவைகளை மெய் எண்கள் (Real number) என்கிறோம். 2, 3, 4 என்பவை நேர் முழு எண்கள் ; $-2, -3, -4$ என்பவை எதிர் முழு எண்கள். $\frac{7}{4}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{-2}{3}$ என்பவற்றில் பகுதியிலும் தொகுதியிலும் முழு எண்கள் வருகின்றன. இவற்றை விகித முறு எண்கள் (Rational numbers) என்கிறோம். தசம பின்னங்களும் விகிதமுறு எண்களே. 1·414 என்றால் $\frac{1414}{1000}$ என ஆவதால் இது விகித முறு எண்ணாகும். ஆனால் $\sqrt{2}$ என்பதற்குத் திட்டவட்டமாய்த் தசம பின்னத்தில் மதிப்புக் காண முடியாது. இத்தகைய எண்கள் $\sqrt{5}$, $\sqrt{1}$ என்பவை விகித முரு எண்கள் (Irrational numbers) எனப் பெயர்படும். முழு எண்கள், விகிதமுறு எண்கள்,

விகித முறு எண்கள் இவையாவும் மெய் யெண்களின் உட்பிரிவே. மெய் யெண்ணும் பொய் எண்ணும் சேர்ந்து வரும் எண்களைக் 'கலப்பெண்கள்' (Complex number) என்போம் $2 + \sqrt{-1} \cdot 5$ என்பது கலப்பெண்ணுகும். $(a + \sqrt{-1} \cdot b)$, $(a - \sqrt{-1} \cdot b)$ என்பவை இணைக் கலப்பெண்கள் (Conjugate complex number) என்போம்.

மூலங்களின் தன்மை : $ax^2 + bx + c = 0$ எனும் சமன் பாட்டில் a, b, c என்ற குணகங்கள் மெய்யெண்களாகுக. மூலங்கள் முறையே $\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, $\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ எனக்

(i) கண்டோம். $(b^2 - 4ac)$ எதிரெண்ணுனல் $-K^2$ என ஆகுக [நேரெண்ணை, ஒரு மெய்யெண்ணின் வர்க்கமாகக் குறிக்கிறேம்]. அப்போது மூலங்கள் $\frac{-b + \sqrt{-k^2}}{2a}$, $\frac{-b + \sqrt{-k^2}}{2a}$ ஆகும்.

அதாவது $\frac{-b + \sqrt{-1}\, k}{2a}$ $-b - \sqrt{-1}\, k$ என இணக் கலப்பெண் களாக வருகிறது. $ax^2 + bx + c = 0$ என்ற சமன்பாட்டில் $(b^2 - 4ac)$ எதிரெண்ணுனல் மூலங்கள் இணைக்கலப்பெண்க ளாகும்.

(எ—டு.) $x^2 + 2x + 17 = 0$

இதில் மூலங்கள் $x = \frac{-2 \pm \sqrt{4-68}}{2}$

$$= \frac{-2 \pm \sqrt{-64}}{2}$$

$$= -1 \pm 4\sqrt{-1}$$

$(-1 + 4\sqrt{-1}\ ;\ -1 - 4\sqrt{-1})$ எனும் இணைக்கலப்பெண்க ளாகும்.

(ii) $b^2 - 4ac = 0$ என்ருல்

$$\alpha = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad \beta = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\therefore \quad \alpha = \frac{-b}{2a} \qquad \beta = \frac{-b}{2a}$$

ஆகவே மூலங்கள் சமமாகின்றன. $ax^2 + bx + c = 0$ என்ற சமன்பாட்டில் மூலங்கள் சமமானல் $b^2 - 4ac = 0$ என வருகிறது.

(iii) $(b^2 - 4ac)$ என்பது நேரெண்ணுனல் $\sqrt{b^2 - 4ac}$ மெய் யெண்ணுகும், α, β எனும் இரண்டு மூலங்களும் வேறு வேறு மதிப்புடையன ஆகவே மூலங்கள் மெய் யெண்களாகும்.

(b^2-4ac) என்பது வர்க்கமானால் $\sqrt{b^2-4ac}$ என்பது முழு எண்ணுகும். ஆகவே மூலங்கள் விகிதமுறு எண்களாகும். குணகங்கள் விகிகமுறு எண்களாக இருந்து b^2-4ac ஒரு வர்க்க எண்ணுனல் மூலங்களும் விகிதமுறு எண்களாகும். இல்லை எனில் விகிதமுரு எண்களாகும்.

இவ்வாறு $ax^2+bx+c=0$ என்ற சமன்பாட்டின் மூலங்களின் தன்மையை 'b^2-4ac' எடுத்துக் காட்டுவதால் அதற்குச் சமன்பாட்டின் 'தன்மைகாட்டி.' (Discrimunant) எனப் பெயர் கூறுகிருேம்.

மாதிரி : $(a-x)\ (b-x)=c^2$ என்ற சமன்பாட்டின் மூலங்கள் மெய்யெண்களென நிறுவுக:

சமன்பாடு $ab-x\,(a+b)+x^2=c^2$

$$x^2-(a+b)x+ab-c^2=0$$

இதன் தன்மை காட்டி $=(a+b)^2-4\,(ab-c^2)$

$$=(a+b)^2-4\,ab+4\,c^2$$

$$=(a-b)^2+4\,c^2$$

$(a-b)^2$, $4\,c^2$ இரண்டும் வர்கங்களானதால் (a, b, c மெய்யெண்களாதலாலும்) அவை நேரெண்களாகும். அவைகளின் கூடுதலும் அதனுல் நேரெண்களாகும். ஆகவே மூலங்கள் மெய்யெண்களாகும்.

பயிற்சி 18

1. கீழே தரப்படும் இருபடிச் சமன்பாடுகளுடைய மூலங்களின் தன்மையைக் கூறுக:

(i) $x^2-5x+2=0$ (ii) $2\,x^2-x-15=0$ (iii) $x^2+x+1=0$

(iv) $5\,x^2-x+3=0$ (v) $8\,x^2+2=11\cdot x$ (vi) $a\,(x^2+1)=x(a^2+1)$

2. கீழேயுள்ள சமன்பாட்டு மூலங்கள் மெய்யெண்களென நிறுவுக:

(i) $x^2+2\gamma x-p^2=0$ (ii) $(x+a)\,(x+b)=c^2$

(iii) $(a-x)\,(b-x)=c^2$

(iv) $P\,(q-r)\,x^2+q\,(r-p)\,x+r\,(p-q)=0$

(v) $t^2-2\,at+a^2-b^2-c^2=0$

(vi) $(l-m+n)\,y^2+4\,(l-m)\,y+(l-m-n)=0$

3. கீழேயுள்ள சமன்பாட்டு மூலங்கள் விகிதமுறு எண்களெனக் காட்டு:

(i) $14x^2 + 71x - 33 = 0$
(ii) $(P^2 - q^2)x^2 + 2(P^2 + q^2)x + (P^2 - q^2) = 0$
(iii) $a(z^2 - 3b) = (3a^2 - b)z$
(iv) $2t^2 + (c + 4)t + 2c = 0$
(v) $m(am - c) = (a - c)$

4. $2x^2 - 2(a + b)x + a^2 + b^2 = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் மூலங்கள் மெய்யெண்களானால் $a = b$ எனக் காட்டு.

5. $ax^2 + bx + c = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் மூலங்கள் மெய்யெண்களானால் $a^2x^2 + (2ac - b^2)x + c^2 = 0$ என்ற சமன்மாட்டின் மூலங்கள் மெய் நேரெண்களாகும் எனக் காட்டு.

6. $ax^2 + 2bx + c = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் மூலங்கள் மெய் யெண்களானால் $(a + c)(ax^2 + 2bx + c) = 2(ac - b^2)(x^2 + 1)$ என்ற சமன்பாட்டின் மூலங்கள் கலப்பெண்களெனக் காட்டு.

6·7. இரண்டு இருபடிச் சமன்பாடுகளின் பொது மூலம்: (Common root of two quadralics).

$ax^2 + bx + c = 0$, $a^1x^2 + b^1x + c^1 = 0$ எனும் இரண்டு சமன்பாடுகளும் ஒரு பொது எண்ணை மூலமாக அடைய அமைய வேண்டிய நியதியைக் காண்போம்.

பொது மூலம் 'α' என்றால்

$$a\alpha^2 + b\alpha + c = 0$$
$$a^1\alpha^2 + b^1\alpha + c^1 = 0$$
$$\therefore \frac{\alpha^2}{(bc^1 - b^1c)} = \frac{\alpha}{(ca^1 - c^1a)} = \frac{1}{(ab^1 - a^1b)}$$
$$\therefore \frac{\alpha^2}{(bc^1 - b^1c)} \cdot \frac{1}{(ab^1 - a^1b)} = \frac{\alpha^2}{(ca^1 - c^1a)^2}$$
$$\therefore (bc^1 - b^1c)(ab^1 - a^1b) = (ca^1 - c^1a)^2$$

குறிப்பு 1: பொது மூலம் $\alpha = \frac{(ca^1 - c^1a)}{(ab^1 - a^1b)}$ என வருகிறது.

குறிப்பு 2: சமன்பாடுகளின் மற்ற மூலங்கள் முறையே β, β^1 ஆனால் $\alpha\beta = \frac{c}{a}$ $\therefore \beta = \frac{c}{a\alpha}$ $\therefore \beta = \frac{c(ab^1 - a^1b)}{a(ca^1 - c^1a)}$

$$\alpha\beta^1 = \frac{c^1}{a^1} \qquad \therefore \beta^1 = \frac{c^1(ab^1 - a^1b)}{a^1(ca^1 - c^1a)}$$

என மற்றிரு மூலங்களையும் காண்கிறோம்.

பயிற்சி 18 (a)

1. $x^2 + ax + 10 = 0$, $x^2 + bx - 10 = 0$ என்ற இருசமன்பாடுகளும் ஒரு பொது மூலத்தைக் கொண்டால் $a^2 - b^2 = 40$ என ஆகும் எனக் காட்டு.

2. $x^2 + ax + b = 0$; $x^2 + bx + a = 0$ எனும் சமன்பாடுகளிடையே ஒரு பொது மூலம் இருந்தால், $a + b + 1 = 0$ எனக் காட்டு; (aயும் bயும் வெவ்வெறு எண்களாகும்)

3. $x^2 + abx + c = 0$, $x^2 + acx + b = 0$ எனும் இருசமன்பாடுகளுக்கு ஒரு பொதுமூலம் உள்ளதாயின், $b = c$ அல்லது மற்ற மூலங்கள் $a(b + c)x^2 + (b + c)x - abc = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் மூலகங்களெனக் காட்டு.

4. $x^2 + ax + bc = 0$, $x^2 + bx + ca = 0$ என்பவற்றிற்கு ஒரு பொது மூலம் உளதாயின், அவற்றின் மற்ற மூலகங்கள் $x^2 + cx + ab = 0$ எனும் சமன்பாட்டின் மூலங்களெனக் காட்டு.

5. $ax^2 + bx + c = 0$, $bx^2 + cx + a = 0$ என்பவை ஒரு பொது மூலத்தைக் கொண்டனவாயின், $a = 0$ அல்லது $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = 0$ எனக் காட்டு. அவற்றின் மற்ற மூலங்களைக் காண்க.

(ii) இருபடிக் கோவை

(Quadralic expression)

$ax^2 + bx + c$ என்பது xல் இருபடிக்கோவை எனப்படும். எடுத்துக்காட்டாக, $x^2 - 4x - 5$ எனும் கோவையைப் பார்ப்போம். xக்கு வெவ்வேறு மதிப்பிட, கோவையின் மதிப்பும் குறியும் மாறுபடுகிறது. $x = 0$ என்றால் கோவை எதிரெண்ணாகும்; $x = 6$ என்றால் நேரெண்ணாகும். இவ்வாறு xஇன் சில மெய்யெண் மதிப்புக்களுக்கு (Real values of x) எதிரெண்ணாகவும், மற்றும் சில மதிப்புக்களுக்கு நேரெண்ணாகவும் ஆகிறது.

பொதுப்படையாக $ax^2 + bx + c$யின் குறி (sign), xஇன் மதிப்பு மாறும்போது எவ்வாறாகிறது என ஆராய்வோம்.

6·8. 1. $(b^2 - 4ac)$ எதிரெண்ணாகவோ, 0 ஆகவோ இருந்தால் $ax^2 + bx + c$யின் குறி, xஇன் எல்லா மெய்யெண் மதிப்புக்களுக்கும் aஇன் குறியாக இருக்கும்.

$$ax^2 + bx + c = a\left\{x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right\}$$

$$= a\left\{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}\right\}$$

$b^2 - 4ac$ எதிரெண்ணானால் $4ac - b^2$ நேரெண்ணாகும். $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$ம் $4a^2$ம், வர்க்கங்கள் ஆனதால் அவையும் xஇன் எல்லா மதிப்புக்களுக்கும் நேரெண்ணே.

∴ அடைப்பில் உள்ள கோவை முற்றிலும் நேரெண். ஆகையால் $ax^2 + bx + c$யின் குறி a இன் குறியாக இருக்கும். $(b^2 - 4ac) = 0$ என்றாலும் அவ்வாறே.

2. $(b^2 - 4ac)$ நேரெண்ணானால் $ax^2 + bx + c = 0$ என்ற சமன்பாட்டில் மூலங்கள் மெய்யெண்களாகும். அவை α, β ஆகுக மீதித் தேற்றத்தின்படி $ax^2 + bx + c = a(a-\alpha)\ (x-\beta)$; α, β இவற்றுள் $\alpha > \beta$ ஆகுக.

(i) அப்போது $x < \beta < \alpha$ ஆனால் $(x - \alpha)$, $(x - \beta)$ இரண்டும் எதிரெண்கள்.

∴ $(x-\alpha)\ (x-\beta)$ நேரெண். $x > \alpha > \beta$ ஆனாலும் $(x-\alpha)$, $(x-\beta)$ இரண்டும் நேரெண்கள்.

∴ $(x-\alpha)\ (x-\beta)$ நேரண்.

∴ இத்தகைய xஇன் மதிப்புக்களுக்கு ax^2+bx+cயின் குறி 'a'யின் குறியாகிறது. ஆனால் xஇன் மதிப்பு α, β இவைகளுக்கு இடையிலாயின் அதாவது $\beta < x < \alpha$ ஆனால் $(x-\beta)$ நேரண்; $(x-\alpha)$ எதிரெண்.

∴ $(x-\alpha)\ (x-\beta)$ எதிரெண்.

∴ $a\ (x-\alpha)\ (x-\beta)$ இன் குறி 'a'யின் குறிக்கு எதிர்.

∴ xஇன் மதிப்பு $ax^2 + bx + c = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் மூலங்களுக்கு இடையிலானால் $ax^2 + bx + c$ என்ற கோவையின் குறி 'a' இன் குறிக்கு எதிராகும்.

x இன் மற்ற மதிப்புக்களுக்கு கோவையின் குறி 'a'யின் குறியாகும்.

$ax^2 + bx + c$ யின் குறி x இன் எல்லா மதிப்புக்களுக்கும் aயினதாக இருக்கவேண்டுமெனில் $(b^2 - 4ac)$ எதிரெண்ணுகவோ பூச்சியமாகவோ இருக்கவேண்டும்.

மாதிரி : xஇன் மெய்யெண் மதிப்புக்களுக்கு $\frac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1}$ என்ற கோவையின் மதிப்பு $3, \frac{1}{3}$ என்ற எண்களிடையே அமையும் என நிறுவுக.

கோவையின் மதிப்பு y ஆகுக.

$$\therefore \quad y = \frac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1}$$

$$x^2 (y - 1) + (xy + 1) + (y - 1) = 0$$

இந்தச் சமன்பாட்டில் x மெய்யெண் ஆதலால் அதன் தன்மை காட்டி $(y + 1)^2 - 4 (y - 1)^2 \geqslant 0$

சுருக்கி எழுத $-3 y^2 + 10y - 3$ நேரெண்ணுகும். அதாவது -3 என்ற y^2இன் குணகத்துக்கு எதிர்க்குறி.

$\therefore$ y இன் மதிப்பு $-3y^2 + 10y - 3 = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் மூலங்களுக்கு இடையே அமையும்.

சமன்பாடு $3 y^2 - 10y + 3 = 0$

$$(3y - 1) (y - 3) = 0$$

$\therefore$ மூலங்கள் $\frac{1}{3}, 3$

$\therefore$ yஇன் மதிப்பு, அதாவது $\frac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1}$ இன் மதிப்பு $\frac{1}{3}, 3$ என்ற எண்களிடையேதான் அமையும்.

மாதிரி : $\frac{4x^2 + 2x - 1}{x^2 + 6x + 3}$ எனும் கோவை எல்லா மதிப்புக்களையும் பெறுமாறு xக்கு மெய்யெண் மதிப்புக்கள் காண முடியும் என நிரூபி.

கோவை $\frac{4 x^2 + 2x - 1}{x^2 + 6x + 3} = y$ ஆகுக.

$$\therefore \quad x^2y + 6xy + 3y = 4x^2 + 2x - 1$$

$$\therefore \quad x^2 (y - 4) + 2x (3y - 1) + 3y + 1 \leqq 0$$

x மெய்யெண்ணுக இருக்க $4 (3y - 1)^2 - 4 (3y + 1) (y - 4) \geqslant 0$

$$(3y - 1)^2 - (3y + 1) (y - 4) \geqslant 0$$

$$\therefore \quad 9y^2 - 6y + 1$$

$$-3y^2 + 11y + 4 \qquad \geqslant 0$$

$$\therefore \quad 6y^2 + 5y + 5 \qquad \geqslant 0$$

ஆனால் $6y^2 + 5y + 5 = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் 'தன்மை காட்டி' $25 - 4 \times 6 \times 5$ எதிரெண்ணுகையால் $6y^2 + 5y + 5$இன் குறி எல்லா மதிப்புக்களுக்கு '6' இன் குறியாக இருக்கும் [தேற்றம் காண்க]

$\therefore$ $6y^2 + 5y + 5$, yஇன் எல்லா மதிப்புக்களுக்கும் நேரெண்ணுகையால் xஇன் மதிப்பும் மெய்யெண்ணுகும்.

பயிற்சி 19

(கீழ் வரும் கணக்குகளில் 'x' மெய்யெண் மதிப்பையே பெறும்.)

1. $\dfrac{x-2}{x^2-2x+1}$ என்ற கோவையின் மதிப்பு $\frac{1}{4}$க்கு மேலிருக்காது எனக் காட்டு.

2. $\dfrac{x^2+12}{2x+4}$ இன் மதிப்பு $(-6, 2)$ என்ற எண்களுக்கிடையே இருக்காது என நிரூபி.

3. $\dfrac{x^2-5x+7}{x^2-3x+3}$ இன் மதிப்பு $(\frac{1}{3}, 3)$ என்ற எண்களிடை மட்டுமே அமையும் என நிறுவுக.

4. $\dfrac{3+16x-12x^2}{2x-3x^2}$ இன மதிப்பு $(5, 20)$ என்ற எண்களிடையே அமையாது எனக் காட்டு.

5. $\dfrac{x^2+4x+1}{x^2+x+1}$ என்ற கோவையின் மதிப்பு -2, 2 என்ற எண்களிடையே அமையும் எனக் காட்டு.

6. $\dfrac{x^2-x-1}{2x^2+x}$ என்ற கோவையின் மதிப்பு 1, 5 என்ற எண்களிடையே இருக்காது எனக் காட்டு.

7. $\dfrac{x^2-3x+2}{31x-x^2-30}$ என்ற கோவை எல்லா மெய்யெண் மதிப்புக்களைப் பெறும் எனக் காட்டு.

8. $\dfrac{x^2-x-6}{2x-1}$ என்ற கோவைக்கு என்ன மதிப்புத் தரினும் x மெய்யெண்ணுகவே இருக்குமெனக் காட்டு.

9. $\dfrac{x^2-2x}{x^2-4x+5}$ என்ற கோவை எல்லா மெய்யெண் மதிப்புக்களையும் பெற இயலும் எனக் காட்டு.

7. வரிசை மாற்றம்

(Permutation)

7·1. பூச்சியம் அல்லாத 3 சிற்றிலக்கங்கள் தரப்பட்டால், எத்தனை இரண்டிலக்க எண்கள் காணமுடியும்? எடுத்துக் காட்டாய், 3, 7, 8 என்ற இலக்கங்களைக் கொள்வோம். இரண்டிலக்க எண்கள் என்றால் ஒன்றாவது தானத்தில் 3, 7, 8 என மூன்று விதமாய் நிரப்பமுடியும். ஏதேனும் ஒரு விதமாய் நிரப்பிய பின்னர் பத்தாவது தானத்தை 2 விதமாய் நிரப்ப முடியும். எனவே 6 வித வரிசையில் எண்களை வைக்கமுடியும். 6 இரண்டிலக்க எண்கள் காணலாம். இங்கு அவை 73, 83, 37, 87, 38, 78. 73லும் 37லும் இலக்கங்கள் ஒன்றே ஆயினும் வரிசை மாறி இருப்பதால் எண்கள் வேறே. இதைத் தான் மூன்று இலக்கங்கள் தரப்பட, இலக்கங்களை எத்தனை வரிசை மாற்றமாய் வைக்கலாம் என்பதே கேள்வி. இதற்கு விடையாக வரிசை மாற்ற எண்ணிக்கை 6 எனக் கண்டோம்.

விடை கண்ட முறையை ஆராய்வோம். இலக்கங்களில் ஒன்றாவது தானத்தை நிரப்புவது ஒரு செயல். இதை 3 விதமாகச் செய்யலாம். பிறகு பத்தாவது தானத்தை நிரப்புவது இரண்டாவது செயல். இதை 2 விதமாகச் செய்யலாம். ஆகவே இரண்டு செயல்களையும் $3 \times 2 = 6$ விதமாகச் செய்யலாம் என விடை கண்டோம். பொதுத் தேற்றமாக இதைக் கூறுவோம்.

7·2. **தேற்றம்:** ஒரு செயலை m விதமாகவும், இதனால் தடையில்லாத இன்னொரு செயலை n விதமாகவும் புரியமுடியுமானால் இரண்டு செயல்களையும் $m \times n$ விதமாகப் புரியமுடியும்.

முதற் செயலை m விதத்தில் ஒரு விதமாய்ச் செய்வோம். பிறகு 2வது செயலை n விதமாய்ச் செய்யலாம். இவ்வாறு ஒவ்வொரு

முதல் செயல் புரியும் வகைக்கும் இரண்டாவது செயலை n வகையாய்ச் செயலாற்றலாம்.

∴ m வகைக்குமாக, இரண்டு செயல்களையும், $m \times n$ வகையாய்ச் செயலாற்றமுடியும்.

குறிப்பு : ஒன்றற் கொன்று தடையில்லாத பல செயல்களில் ஒன்றை m விதமாக, மற்றதை r விதமாக எனச் செயலாற்ற முடிந்தால் எல்லாவற்றையும் $m \times nxr \times$ —. வகையில் செயலாற்றலாம்.

(எ - டு) ஒருவனிடம் 4 கணித நூல்கள், 3 தமிழ் நூல்கள், 2 ஆங்கில நூல்கள் உள்ளன. வகைக் கொன்றுய் எத்தனை விதமாய் எடுத்துக் கொள்ளலாம்.

1 கணித நூல் எடுத்தால் ஒரு செயல்	விதம்	4
1 தமிழிலிக்கிய நூல் எடுத்தால்	விதம்	3
1 ஆங்கில நூலெடுத்தால்	விதம்	2
∴ வகைக் கொன்றுய் எடுத்தால்	விதம்	$4 \times 3 \times 2$ $= 24$

∴ **மாதிரி :** 4, 3, 5, 1, 7 என்ற இலக்கங்களினுல் ஒரே இலக்கம் திரும்ப வராதபடி எத்தனை மூன்றிலக்க எண்களைக் காணலாம். அவற்றின் கூடுதல் என்ன?

ஒன்ருவது தானத்தை நிரப்பும் விதம் 5

அவ்வாறு செய்த பின்

பத்தாவது தானத்தை நிரப்பும் விதம்

மீதி நான்கு இலக்கங்களாதலால் 4

இவ்வாறே பிறகு

நூருவது தானம் நிரப்பும் விதம் 3

∴ மொத்தம் 3 இலக்க எண்கள் $= 5 \times 4 \times 3$

$= 60$

ஒவ்வொரு இலக்கத்திற்கும் ஒன்று, பத்து, நூறு தானங்களில் வர சமவாய்ப்புக்கள் இருப்பதால் 12 எண்களில் ஒன்ருவது தானத்தில் 4 வரும். 12 எண்களில் 3, 12 எண்களில் 5, 12 எண்களில் 1, 12 எண்களில் 7 வரும்.

∴ ஒன்ருவது தானக் கூடுதல் $= 12 \, [4+3+5+1+7]$

$= 12 \times 20 = 240$ ஒன்றுகள்

இவ்வாறே 240 பத்துக்கள், 240 நூறுகள்

என ஆவதால் மொத்தம் கூடுதல் $= 240 \times 111$.

பயிற்சி 20

1. ஒரு மலையுச்சிக்குக் கீழிருந்து மூன்று பாதைகள் உள்ளன. எத்தனை விதமாய் (*i*) மேலே ஏறி இறங்கலாம். (*ii*) ஏறின பாதை வழி இறங்காமல் எத்தனை வகையாய் ஏறி இறங்கலாம்.

2. என்னிடம் பரிசு கொடுக்க நான்குவிதப் பொருள்கள் உள்ளன. எனது மூன்று நண்பர்களுக்கு எத்தனை விதமாய் ஒருவர்க்கு ஒரு பொருள் பரிசாய்க் கொடுக்க முடியும் ?

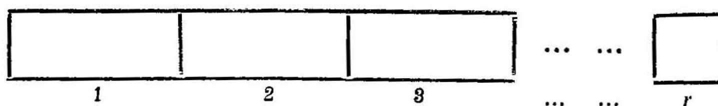
3. 5 பேர்களை வரிசையாக இருக்கும் 4 நாற்காலிகளில் எத்தனை விதமாய் உட்கார வைக்க முடியும் ?

4. 2, 4, 6, 8, 9 என்ற இலக்கங்களால் எத்தனை மூன்றிலக்க எண்கள் காணமுடியும், அவற்றுள் ஒற்றைப் படை எண்கள் எத்தனை ?

5. 0, 1, 3, 5, 6, 7 என்ற இலக்கங்களாய் எத்தனை நான்கு இலக்க எண்கள் காணமுடியும். அவற்றுள் இரட்டைப்படை எண்கள் எத்தனை ?

7 3 வரிசைமாற்றத்தில் ஒரு தேற்றம். [$^n\mathrm{P}_r$ இன் மதிப்பு]

n பொருள்கள் வெவ்வேருக இருந்தால் அவைகளை 'r' ஆக வரிசையில் $n\ (n-1)\ (n-2)\ \ldots\ (n-r+1)$ விதமாக வைக்க முடியும்.



மேலே காட்டியபடி வரிசையாக 'r' இடங்கள் உள்ளன. 'n' பொருள்களிலிருந்து 'r' இடங்களை நிரப்ப ஒவ்வொரு இடத்தையும் ஒரு பொருளால் நிரப்புவது ஒரு செயலாகும்.

1வது இடத்தை nr விதமாய் நிரப்பலாம். இவ்வாறு ஒரு பொருளால் நிரப்பிய பின்னர், $(n-1)$ பொருள்கள் உள்ளன. ஆகவே இரண்டாவது இடத்தை ஒரு பொருளால் $(n-1)$ விதமாய் நிரப்பலாம். இவ்வாருக இரண்டு இடங்களையும் ஒவ்வொரு பொருளால் நிரப்பிய பின்னர் உள்ள பொருள்கள் $(n-2)$. ஆகவே மூன்ருவது இடத்தை $(n-3)$ விதமாக நிரப்பலாம்.

இவ்வாருக ஒன்ருவது இடம் முதல் 'r'வது இடம் வரை நிரப்பும் செயல்களைத் தனித்தனியே n, $(n-1)$, $(n-2)$ ... ...

$(n-r+1)$ எனும் வகைகளில் செய்யமுடிகிறது. ஆகவே பொதுச் சூத்திரப்படி 'r' இடங்களையும் நிரப்புவது $n(n-1)$ … … என 'r' காரணிகள். அதாவது $n(n-1)(n-2)$ $(n-r+1)$

இவ்வாறு 'n' பொருள்களால் r ஆக ஏற்படும் எல்லாவித வரிசைகளின் எண்ணிக்கை ${}_nP_r$ எனக் குறிக்கப்படும். $\therefore {}_nP_r = n(n-1)(n-2) \ldots (n-r+1)$

7·4. **மாற்று நிரூபணம்:**

${}_nP_r$ என்பது n பொருள்களால் வரிசையாக r ஆக வைக்க ஏற்படும் எல்லாவித வரிசைகளின் எண்ணிக்கை எனப் பொருளாகும்.

r இடங்களில் முதல் இடத்தை நிரப்பும் செயலை, n' விதமாய்ச் செய்யலாம். இவ்வாறு ஒரு பொருளால் நிரப்பியபின்னர் எஞ்சிய பொருள்கள் $(n-1)$, இடங்கள் $(r-1)$. குறியீட்டின்படி $(r-1)$ ஆக ஏற்படும் வரிசை எண்ணிக்கை ${}_{n-1}P_{r-1}$. ஆகவே 'r' இடங்களையும் $n\cdot{}_{n-1}P_{r-1}$ விதமாய் நிரப்பலாம்.

$\therefore \quad {}_nP_r = n\cdot{}_{n-1}P_{r-1}$

$\therefore \quad {}_{n-1}P_{r-1} = (n-1)\,{}_{n-r}P_{r-2}$

${}_{n-2}P_{r-2} = (n-2)\,{}_{n-3}P_{r-3}$ இவ்வாருக r வர

${}_{n-r+1}P_1 = (n-r+1)\cdot 1$

[ஏனெனில் $\overline{n-r+1}$ பொருளால் 1 இடத்தை $\overline{n-r+1}$ விதமாய் நிரப்ப முடியும்].

இருபுறத்தையும் பெருக்குப் பொதுக் காரணிகளை நீக்கி வருவது ${}_nP_r = n(n-1)(n-2)$ $(n-r+1)$

7·5. **ஒரு குறியீடு:** $4\cdot3\cdot2\cdot1$, என 4 முதல் 1 ஈருகத் தொடர்ந்து வரும் காரணித் தொகுதியை $\underline{4|}$ அல்லது $4!$ எனக் குறிப்பது ஒரு கணிதக் குறியீடாகும். எழுதும்போது, $\underline{|4}$ என்ற குறியீடே கையாளப் படுகிறது. இதை 'factorial four' என்பர். இதை 4 காரணியம் எனக் கூறலாம்.

ஆகவே $n(n-1)(n-2)\cdot\ 1$ எனும் தொகுதியை $\underline{|n}$ எனக் குறிக்க வேண்டும்.

$\therefore \quad \underline{|n} = n\,\underline{|n-1} = n(n-1)\,\underline{|n-2}$ . . எனத் தெரிகிறது.

${}_nP_r$இன் மதிப்பு காரணீயக் குறியீட்டில் எழுதுவோம்.

${}_nP_r = n(n-1)(n-2). \quad (n-r+1)$

$$= \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)\,.\,(n-r)(n-r-1)\ldots}{(n-r)(n-r-1)\quad\ldots\quad\ldots\quad 1}$$

$$= \frac{\underline{|n}}{\underline{|n-r}}\ .$$

குறிப்பு: $n\,P_n$ என்ருல் 'n' பொருள்களால் 'n' இடத்தை வரிசையாக நிரப்பும் வகையின் எண்ணிக்கை.

$$n\,P_n = n\,(n-1)\,(n-2)$$
$$= \underline{|n}$$

ஆனுல் $n\,P_r = \frac{\underline{|n}}{\underline{|n-r}}$ என்பதில் 'r'க்குப் பிரதியிட

$$n\,P_n = \frac{\underline{|n}}{\underline{|o}}$$ என வருகிறது.

ஆகவே $\underline{|o}$ என்பதற்கு 1 எனப் பொருள் கொள்வது பொருத்த முடையது.

மாதிரி: 8 பெரியவர்களையும் நான்கு சிறுவர்களையும் வரிசையாக உட்கார வைக்க வேண்டும். இரண்டு சிறுவர்கள் அடுத்தடுத்து உட்காராமல் எத்தனை வகை வரிசைகள் எற்படுத்த முடியும்? முதலில் 8 பெரியவர்களை (${}_8P_8$) வரிசையாக வைக்க முடியும் அவ்வாறு ஏற்படுத்தும் ஒவ்வொரு வரிசையிலும் பெரியவர் களிடையே 7 இடங்களும், இரண்டு முனைகளிலும் 2 இடங்களு மாகச் சிறுவர்களை நிறுத்த 9 இடங்கள் உள்ளன.

ஆகவே 4 சிறுவர்களை ${}_9P_4$ வரிசையாக நிறுத்த முடியும்.

ஆகவே பெரியவர்களையும் சிறுவர்களையும், 2 சிறுவர்கள் அடுத்தடுத்து வராமல் ${}_8P_8 \times {}_9P_4$ வரிசைகளாக ஏற்படுத்தலாம்.

வரிசைகளின் எண்ணிக்கை $= {}_8P_8 \times {}_9P_4$

$$= \frac{\underline{|8} \times \underline{|9}}{\underline{|5}}$$

மாதிரி: 'n' பையன்களை வரிசையாக நிறுத்துவதில் இரண்டு குறிப்பிட்ட பையன்களில், ஒருவனும் ஒரு முனையில் வராமல் இருக்கும்படி $(n-2)\;(n-3)\;\underline{|n-2}$ வகையாக நிறுத்தலாம் என நிறுவுக.

இதற்கு விடை காண: *(i)* 'n' பையன்களை எத்தனை வரிசை யாக நிறுத்தலாம் *(ii)* அவற்றுள் எத்தனை வரிசைகளில் 2 பையன் களும் ஒவ்வொரு முனைகளில் வருவார்கள்; அவர்களுள் ஒரு பையன் முனையில் வருவான். இதை மொத்த வரிசைகளிலிருந்து நீக்க விடை வரும்.

(i) n பையன்களை $\underline{|n}$ வகையாக வரிசையாய் நிறுத்தலாம்.

(ii) இரண்டு முனைகளிலும் 2 பையன்களை $|\underline{2}$ விதமாய் நிறுத்தலாம். மற்ற பையன்களின் எண்ணிக்கை $(n-2)$ இவர்களை $|\underline{n-2}$ விதமாய் நிறுத்தலாம்.

∴ 2 பையன்களும் முனைகளில் வரும் வரிசைகள் $2\,|\underline{n-2}$.

(iii) ஒரு பையன் மட்டும் ஒரு முனையில் வரும் வரிசைகள், A, B பையன்களைக் குறித்தால்,

(a) Aஐ இரண்டு விதமாக முனைகளில் நிறுத்தலாம்.

(b) Bஐ $(n-2)$ விதமாக நிறுத்தலாம். ஏனெனில் n இடங்களில் இரண்டு முனைகளிலும் அவன் வரக்கூடாது. எஞ்சியுள்ள $(n-2)$ இடங்களில் $(n-2)$ பையன்கள். $|\underline{n-2}$ விதமாய் நிறுத்தலாம். இவ்வாறு A ஒரு முனையிலும், B இடையிலும் வரும் வரிசைகள் $2\,(n-2)\,|\underline{n-2}$.

(iv) இதுபோன்று B ஒரு முனையிலும் A இடையிலும் வரும் வரிசைகள் $2\,(n-2)\,|\underline{n-2}$.

∴ A, B என்பவர்கள் இரண்டுபேருமோ, ஒருவரோ முனையில் வரும் வரிசைகள்

$$2\,|\underline{n-2} + 4\,(n-2)\,|\underline{n-2}$$
$$= 2\,|\underline{n-2}\,[1 + 2\,(n-2)]$$
$$= 2\,|\underline{n-2}\,(2n-3)$$

இதை $|\underline{n}$ லிருந்து நீக்க வரிசைகளின் எண்ணிக்கை

$$|\underline{n} - 2\,|\underline{n-2}\,(2n-3)$$
$$= |\underline{n-2}\,[n(n-1) - 4n + 6]$$
$$= |\underline{n-2}\,(n^2 - 5n + 6)$$
$$= |\underline{n-2}\,(n-2)(n-3)$$

மாதிரி: 4 மாணவர்கள், 3 மாணவிகள் கொண்ட குழுவொன்றை வரிசையாக உட்கார வைக்கவேண்டும். மாணவர்கள் யாவரும் ஒன்றுகவும், மாணவிகள் யாவரும் ஒன்றுகவும் அமரும்படியாய் எத்தனை விதமாய் வரிசையை அமைக்கலாம்?

(i) 4 மாணவர்களை அவர்தம்மில் $4P_4$, அதாவது $|\underline{4}$ விதமாய் வரிசையாய் இருத்தலாம்.

(ii) 3 மாணவிகளை ${}_3P_3$ அதாவது $|\underline{3}$ விதமாய் அவர்தம்மில் வரிசையாய் இருத்தலாம்.

(iii) மாணவ, மாணவி என இருபிரிவுகளை $|\underline{2}$ விதமாய் அமைக்கலாம்.

இத்தகைய மூன்று வரிசைகளைத் தனித்தனியே ஒன்றற்கொன்று இடையூறின்றி அமைக்க முடியுமாதலின், (mutually exclusive) அவர்களை மாணவர்கள் ஒன்ருகவும், மாணவிகள் ஒன்ருகவும் ஆக $\lfloor 4 \times \lfloor 3 \times \lfloor 2$ விதமாய் அமரவைக்கலாம்.

மொத்த வித வரிசைகள் $= 24 \times 6 \times 2$

$= 288$

பயிற்சி 21

1. மதிப்புக் காண்க $5P_2$, $6P_3$, $7P_2$, $4P_4$.

2. 2, 3, 5, 8, 9 என்ற இலக்கங்களால் எத்தனை நான்கு இலக்க எண்கள் காணலாம்?

3. பன்னிரண்டு உயிர் எழுத்துக்களை நான்கு, நான்காக எத்தனை வகை வரிசைகளில் வைக்கமுடியும்?

4. 9 பெரியவர்களையும் 5 சிறுவர்களையும் வரிசையாக அமரச் செய்யவேண்டும்.

(i) சிறுவர்கள் அடுத்தடுத்தோ அல்லது முனைகளிலோ வராதபடி எத்தனை வகையாக அமரச்செய்யலாம்?

(ii) பெரியவர்கள் ஒன்ருகவும் சிறுவர்கள் ஒன்ருகவும் எத்தனை விதமாய் அமரலாம்?

5. ஒரு தட்டில் 3 கணித நூல்கள், 4 தமிழ் நூல்கள், 6 ஆங்கில நூல்களை வரிசையாக வைக்க வேண்டும், ஒரு பிரிவு நூல் மற்றதில் கலக்காதபடி எத்தனை வரிசையாக அடுக்கமுடியும்?

6. 7 பேர் ஒரு பொதுக்கூட்டத்தில் பேச வேண்டும். அவர்களுள் குறிப்பிட்ட இரண்டு பேர் ஒருவர்பின் ஒருவராய்ப் பேச வேண்டுமெனில், எத்தனை வகையில் 7 பேர்களும் பேசமுடியும்? அவர்களுள் ஒரு குறிப்பிட்ட நபர் இன்னொரு குறிப்பிட்ட நபருக்குப் பிறகுதான் பேசவேண்டுமெனில் எத்தனை வகையில் 7 பேர் பேசுவதை வரிசைப்படுத்தமுடியும்.

(ii) தொகுதிச் சேர்க்கை

(Combination)

மூன்று சிற்றிலக்கங்கள் தரப்பட்டால், அவற்றிலிருந்து எத்தனைவிதமாய் 2 இலக்கங்கள் எடுக்கமுடியும்? எடுத்துக் காட்டாய் 3, 7, 8 என்ற இலக்கங்களைக் கொள்வோம். (3, 7), (3, 8), (7, 8) என மூன்றுவிதமாகக் கொள்ளமுடியும். இங்கு 2 இலக்கங்கள் என்ன வரிசையில் வருகின்றன என்பது தேவையில்லை (3,7) என்றாலும் (7,3) என்றாலும் ஒரேவகைத்தொகுதியே.

7·6. nC_r **எனும் குறியீடு:** nC_r என்றால் n வெவ்வேறு பொருள்களிலிருந்த 'r' பொருள்கள் கொண்ட வெவ்வேறு தொகுதிகளின் எண்ணிக்கையாகும். மேலே கூறின எடுத்துக்காட்டில் மூன்று இலக்கங்கள் தரப்பட்டால் எத்தனை விதமாய் 2 இலக்கத் தொகுதி சேர்க்கமுடியும் என்பதில் 3 எனக் கண்டோம். ஆகவே குறியீட்டில் கூறுமிடத்து $3C_2 = 3$ எனக் கூறவேண்டும்.

7·7. nC_r **இன் மதிப்புக் காண:** ஒன்றற்கொன்று வேறுபட்ட n பொருள்களிலிருந்து 'r' பொருள்கள் கொண்ட தொகுதிச் சேர்க்கை எத்தனை விதமாய்ச் சேர்க்கலாம்? இதன் எண்ணிக்கையை nC_r எனக்குறிக்கிறோம். இதன் மதிப்புக் காண n பொருள்களால் 'r' ஆக வரிசை nP_r வரிசைகள் ஏற்படுத்த முடியும் என்று கண்டோம். ஒவ்வொரு பொருளாய் எடுத்து வரிசையில் வைக்காமல் முதலில் r பொருள்களைக் கொள்வோம். இதை எடுக்கும் விதம் 'x' ஆகுக. $\therefore nC_r = x$; ஒவ்வொரு விதமாக எடுக்கும்போது 'r' பொருள்களை r இடத்தில் $\underline{|r}$ $\left(= rP_r \right)$ விதமாய் வரிசையாய் வைக்கமுடியும். ஆகவே x விதமான தொகுதிச் சேர்க்கைக்கு $x\,\underline{|r}$ விதமாய், r இடத்தை நிரப்பலாம்.

$$\therefore x\,\underline{|r} = nPr = \frac{\underline{|n}}{\underline{|n-r}}$$

$$\therefore x = \frac{\underline{|n}}{\underline{|n-r}\,\underline{|r}} \qquad \therefore nC_r = \frac{\underline{|n}}{\underline{|n-r}\,\underline{|r}}$$

மாற்று வழி: [$n\,P_r$ இன் மதிப்பைப் பயன்படுத்தாமல் $n\,C_r$ இன் விளக்கத்தினின்று காணும் முறை].

n வெவ்வேறு பொருள்கள், a, b, c ... என்பதால் குறிப்போம். 'r' எழுத்துக்களின் தொகுதிச் சேர்க்கை $n\,C_r$ ஒவ்வொரு தொகுதியிலும் 'r' எழுத்துக்கள் உள்ளதால் மொத்த எழுத்து $r \cdot n\,C_r$

இதையே வேறுவழியில் காண்போம். 'a' எனும் எழுத்து வரும் தொகுதியில் aயும் எஞ்சிய $(n-1)$ எழுத்துக்களின் தொகுதியும் ஆகும். ஆகவே $_{n-1}C_{r-1}$ தொகுதிகளில் a வரும். இவ்வாறு 'n' எழுத்துக்களில் ஒவ்வொரு எழுத்தும் $_{n-1}C_{r-1}$ தொகுதிகளில் வரும். $\therefore$ மொத்த எழுத்துக்கள் $n\,_{n-1}C_{r-1}$. ஆகவே

$$r\;nC_r = n\;_{n-1}C_{r-1} \text{ என வருகிறது.}$$

$$\therefore\quad (r-1)\,_{n-1}C_{r-1} = (n-1)\,_{n-2}C_{r-2}$$

$$(r-2)\,_{n-2}C_{r-2} = (n-2)\,_{n-3}C_{r-3}$$

... ...

... ...

$$2\,_{n-r+2}C_2 = (n-r+2)\,_{n-r+1}C_1$$

இருபக்கத்தையும் பெருக்குப் பொதுக் காரணிகளை நீக்க வருவது

$$r(r-1)(r-2)\ldots 2\cdot n\,C_r = n(n-1)(n-2)\cdots$$

$$(n-r+2)\,n-r+1\,C_1 \text{ ஆனல் } n-r+1C_1 = (n-r+1)$$

$$\therefore\quad n\,C_r = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots\quad(n-r+1)}{r(r-1)(r-2)\ldots\quad 1}$$

$$= \frac{\lfloor n}{\lfloor r\;\lfloor n-r}$$

குறிப்பு 2: மேல் கூறிய முறை விளங்க $6C_3$ இன் மதிப்பை மேற்கண்ட முறையில் காணுங்கள்.

$$3\cdot 6C_3 = 6\,5C_2;\quad 2\cdot 5C_2 = 5\cdot 4C_1 = 5\cdot 4$$

$$\therefore\quad 3\cdot 2\cdot 1\cdot 6C_3 = 6\cdot 5\cdot 4 \quad \therefore\quad 6C_3 = \frac{6\cdot 5\cdot 4}{1\cdot 2\cdot 3} \text{ என வருகிறது}$$

7.8. $n\,C_r = n\,C_{n-r}$ என நிறுவ:

$$n\,C_r = \frac{\lfloor n}{\lfloor r\;\lfloor n-r};\quad n\,C_{n-r} = \frac{\lfloor n}{\lfloor n-r\;\lfloor n-(n-r)}$$

$$= \frac{\lfloor n}{\lfloor n-r\;\lfloor r}$$

$$\therefore\quad n\,C_r = n\,C_{n-r}$$

மாற்று வழி. $n\,Cr$ என்பது n வெவ்வேறு பொருட்களினி லிருந்து 'γ' ஆகச் சேர்க்கும் தொகுதிகளின் எண்ணிக்கையாகும். 'γ' பொருள் கொண்ட ஒரு தொகுதியை எடுத்தோமாஞல் $(n-r)$ பொருள்கொண்ட ஒரு தொகுதி விடப்படும். ஆகவே ஒவ்வொரு விதமாக 'γ' பொருள் எடுக்கும் போதும், $(n-r)$ கொண்ட தொகுதி யொன்று விடப்படும்.

∴ 'γ' பொருள் தொகுதிகளின் எண்ணிக்கை = $(n-r)$ பொருள் தொகுதிகளின் எண்ணிக்கை

$\therefore\ n\,Cr = n\,Cn-r$

குறிப்பு: $100\ C_{99}$ என்பதைக் காண $100\ C_{99} = 100\ C_1$

$\therefore\ 100\ C_{99} = 100\ C_1 = 100$

இதேபோல $10\ C_8 = 10\ C_2 = \dfrac{10 \cdot 9}{1 \cdot 2} = 45]$.

7·9. $n\,Cr = n-1\ Cr + n-1\ Cr-1$ **என நிறுவுக:**

$a, b, c \ldots\ldots$ என்ற 'n' பொருள்களிலிருந்து 'γ' பொருள் கொண்ட தொகுதிகளின் எண்ணிக்கை $= n\,Cr$. இந்தத் தொகுதிகளை இரு பிரிவுகளாகப் பிரிக்கலாம்.

(i) 'a' எனும் பொருள் இல்லாத தொகுதிகள். ஆகவே 'a'ஐ நீக்க எஞ்சுவது $(n-1)$ பொருள்கள். இவற்றிலிருந்து 'γ' பொருள் தொகுதி $n-1\ Cr$ ஆகும்.

(ii) 'a' எனும் பொருள் உள்ள தொகுதிகள் 'a'ஐ எடுத்துக் கொள்ளவும் எஞ்சிய $(n-1)$ பொருள்களிலிருந்து இன்னும் $(r-1)$ பொருள்கள் எடுக்க வேண்டும். இதன் வகை $n-1\ Cr-1$. இரண்டும் சேர்ந்தது $n\,Cr$ ஆகும்.

$\therefore\ n\,Cr = n-1\ Cr + n-1\ C\,r-1.$

இதேபோல $n+1\ Cr = n\,Cr + n\,Cr-1.$

மாதிரி: ஒரு 'n' முனை பல கோணத்தில் எத்தனை மூலைக் கோடுகள் உள்ளன. இரண்டு முனைகள் ஒரு கோட்டைத் தரும். ஆகவே 'n' முனைகளை இரண்டிரண்டாக $n\,C_2$ விதமாய் எடுக்க முடியும். இந்த $n\,C_2$ கோடுகளில், n பக்கங்கள் போக எஞ்சியவை மூலைக் கோடுகள்.

$\therefore$ மூலைக் கோடுகளின் எண்ணிக்கை $= n\,C_2 - n$

$$= \frac{n\,(n-1)}{1 \cdot 2} - n = \frac{n}{2}\left[n-1-2\right] = \frac{n\,(x-3)}{2}$$

மாதிரி: 11 ஆட்டக்காரர்களும் 2 ரிசர்வுகளும் கொண்ட ஒரு கிரிக்கட் டீம் தேர்ந்தெடுக்க வேண்டும். இவர்களை 15 பேர் கொண்ட ஒரு பிரிவிலிருந்தும் 12 பேர் கொண்ட பிரிவிலிருந்தும் பொறுக்க வேண்டும். முதல் பிரிவிலிருந்து குறைந்தது 6 பேரும் இரண்டாவதிலிருந்து குறைந்தது 4 பேரும் எடுக்கவேண்டுமானல் எத்தனை விதமான டீம்கள் பொறுக்க முடியும்?

டீம்	A	B	டீம்களின் எண்ணிக்கை
எடுக்கப்படுவோர்	6	7	$15\,C_6 \times 12\,C_7$
எண்ணிக்கை	7	6	$15\,C_7 \times 12\,C_6$
	8	5	$15\,C_8 \times 12\,C_5$
	9	4	$15\,C_9 \times 12\,C_4$

ஆகையால் மொத்த எண்ணிக்கை.

$$15\,C_6 \times 12\,C_7 + 15\,C_7 \times 12\,C_6 + 15\,C_8 \times 12\,C_5 + 15\,C_9 \times 12\,C_4$$

பயிற்சி 22

1. 10 விதப் பொருள்களிலிருந்து 7 பொருள்கள் எத்தனை வகையாய் எடுக்கலாம்?

2. 8 மாணவர்கள் 5 மாணவிகள் 6 ஆசிரியர்கள் இவர்களிலிருந்து 8 பேர் கொண்ட குழு அமைக்க வேண்டும். குறைந்தது 2 மாணவர்கள், 3 ஆசிரியர்கள், 1 மாணவியிருக்க வேண்டுமெனில் எத்தனை வகையாய்க் குழுக்கள் அமைக்க முடியும்.

3. 7 தமிழ்த் தினத்தாள்கள், 4 ஆங்கிலத் தாள்கள் இவற்றிலிருந்து 6 தாள்கள் வாங்கவேண்டும்.

(i) 2 ஆங்கிலத் தாள்கள் மட்டும் இருக்கும்படி எத்தனை வகையாய் வாங்கலாம்.

(ii) 2 ஆங்கிலத் தாள்களாவது இருக்கும்படி எத்தனை வகையாய் வாங்கலாம்.

4. 6 எண்கள், 3 எழுத்துக்கள் இவற்றிலிருந்து 2 எண்களாவது வரும்படி எத்தனை வகையாய் எண்களும் எழுத்துக்களுமாய் ஐந்து எடுக்கமுடியும்.

5. 10 புள்ளிகளில் எந்த மூன்று புள்ளிகளும் நேர்கோட்டில் அமையவில்லை எனில் அவற்றால் எத்தனை முக்கோணங்கள் ஏற்படுத்தலாம்.

6. மேற்கூறிய கணக்கில் புள்ளிகளின் எண்ணிக்கை 'n' முக்கோணங்கள் எத்தனை?

8. ஈருறுப்புக் கோவைத் தேற்றம்
(Binomial Theorem)

8·1. ஈருறுப்புக் கோவைத் தேற்றம், $(x+y)^n$ என்பதன் விரிவை, n என்ன எண் ஆயினும், தருகிறது. இங்கு n சாதாரண முழு எண் (Positive intigu) என்ருல் விரிவு என்ன என்பதைக் காண்போம்.

$$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$
$$(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$

என்பதைச் சாதாரணப் பெருக்கல் வழியாக நாம் அறிவோம். அடுக்குகள் இன்னும் பெரிய எண்களாஞல் விரிவைப் பெருக்கல் முறையில் காண்பது எளிதல்ல. ஆகவே,

எடுத்துக் காட்டாய் $(x+y)^5$ என்பதன் விரிவைக் காணும் முறையைக் கூறுவோம்.

$(x+a)\ (x+b)\ (x+e)\ (x+d)\ (x+e)$

$= x^5 + x^4\,(a+b+c+d+e$ என $5\,e_1$ உறுப்புக்கள்)

$+ x^3\,(ab + ae + ad +$ என $5\,c_2$ உறுப்புக்கள்)

$+ x^2\,(abc + abd +$ ... என $5\,e_3$ உறுப்புக்கள்)

$+ x\ (abcd +$ ... ... என $5\,c_4$ உறுப்புக்கள்)

$+\ abcde$ ... ... ($5\,c_5$ உறுப்புக்கள்)

இதில் $a = b = c = d = e = y$ எனப் பிரதியிட

$(x+y)^5 = x^5 + 5\,C_1\,x^4\,y + 5\,C_2\,x^3\,y^2 + 5\,C_3\,x^2\,y^3 + 5\,C_4\,xy^4 + 5\,C_5\,y^5$ என வருகிறது.

[குறிப்பு : x^3, x^2, ... என்பதன் குணகங்களை முழுவதும் எழுதத் தேவையில்லை. எத்தனை உறுப்புக்கள் என்பதே தேவை.

பயிற்சி

இங்குச் செய்தது போல் $(x+y)^4$, $(x+y)^6$, $(x+y)^7$ என்பதன் விரிவைக் காணவும்.

8·2. **ஈருறுப்புக் கோவைத் தேற்றம் (முழு நேரெண் அடுக்கிற்கு)** (Binomial Theorem for a Positive integral index):

$$(x+y)^n = x^n + nC_1 x^{n-1} y + n C_2 x^{n-2} y^2 \dots + n Cr\, x^{n-r} y^r + \dots n Cn\, y^n$$

இதுவே ஈருறுப்புக் கோவைத் தேற்றமாகும்.

நிரூபணம்: கீழே வரும் 'n' காரணிகளின் பெருக்கற் பலனை முறையாக எழுதுவோம்.

$$(x+a_1)(x+a_2)(x+a_3) \dots \dots (-x+a_n)$$

$= x^n + x^{n-1}(a_1 + a_2 + a_3 \quad \dots$ என $n\,C_1$ உறுப்புக்கள்)

$+ x^{n-2}(a_1 a_2 + a_1 a_3 + \quad \dots$ என $n\,C_2$ உறுப்புக்கள்)

... ...

... ...

$+ x^{n-r}\; a_1 a_2 a_r + \quad \dots$ (என $n\,C_r$ உறுப்புக்கள்)

... ...

... ...

$x\, a_1 a_2 a_3 \dots \dots a n \quad \dots$ (என $n\,C_n$ உறுப்புக்கள்)

$a_1, a_2, a_3 \dots \dots a\,n$ இவை ஒவ்வொன்றிற்கும் y எனப் பிரதியிட்டுச் சுருக்க:

$$(x+y)^n = x^n + n\,C_1 x^n y + nC_2 x^{n-2} y^2 + \dots$$

$$n\,C_{r}\, x^{n-r} y^r + \dots + n\,C_n\, y^n$$ என வருகிறது.

8·3. மாற்று நிரூபணம்:

தொகுதிதறி முறை: (Induction Proof)

$$(x+y)^n = x^n + n\,C_1 x^{n-1} y + \dots\; n\,C_{r-1}\, x^{n-r+1}\, y^{r-1} + n\,C_r\, x^{n-r}\, y^r + \dots y^n$$ ஆகுக. (1)

இரு பக்கங்களையும் $(x+y)$ஆல் பெருக்க

$$(x+y)^{n+1} = (x+y)^n (x+y)$$

$(x + y)^n$ இன் நாம் மேற்கொண்ட விரிவின் ஒவ்வொரு உறுப்பையும் $(x + y)$ல் பெருக்கி ஒன்று போன்ற உறுப்புக்களைத் தொகுத்து எழுத

$$(x + y)^{n+1} = x^{n+1} + (1 + n\,C_1)\, x^n\, y + (n\,C_1 + n\,C_2)\, x^{n-1} y^2 + .$$
$$+ (\,n\,C_{r-1} + n\,C_r\,)\, x^{n-r+1} y^r \;+ \ldots y^{n+1} \quad (2)$$

ஆனால் $n\,C_{r-1} + n\,C_r = n + 1\,C_r$ என அறிவோம்

$$\therefore\ (x+y)^{n+1} = x^{n+1} + {}_{n+1}C_1\, x^n\, y + {}_{n-1}C_2\, x^{n-1}\, y^2 +$$
$${}_{n+1}C_r\, x^{n+1-r}\, y^3 + \ldots y^{n+1}$$

ஆகவே $(x + y)^n$ இன் விரிவு சரியானல் $(x + y)^{n+1}$ அதே வடிவில் வருவதைக் காண்கிறோம்.

$n = 2$ என்றால் $(x + y)^2 = x^2 + {}_2C_1\, xy + {}_2C_2\, y^2$

$$(x + y)^3 = x^3 + {}_3C_1\, x^2 y + {}_3C_2\, xy^2 + {}_3C_3\, y^3$$

ஆகவே $n = 2, 3$ எனும் மதிப்புக்களுக்குச் சரி ஆகிறது. ஆகவே $n = 4$க்குச் சரியாக வேண்டும். அதனல் $n = 5$க்குச் சரியாக வேண்டும். இவ்வாறு nஇன் ஒவ்வொரு முழு எண் மதிப்புக்கும் சரியாக வேண்டும்.

$$\therefore\ (x+y)^n = x^n + {}_nC_1\, x^{n-1}\, y + \ldots + {}_nC_r\, x^{n-r}\, y^2 + \ldots$$
$$+ {}_nC_n\, y^n$$

குறிப்பு 1. மேற்கூறிய $(x + y)^n$ இன் விரிவில் கவனிக்கத் தக்கவை.

(i) மொத்தத்தில் விரிவில் $(n + 1)$ உறுப்புக்கள் உள்ளன.

(ii) xஇன் அடுக்கு ஒவ்வொன்ருகக் குறைய, yஇன் அடுக்கு ஒவ்வொன்ருக அதிகமாகிறது.

(iii) $n\,C_1,\ n\,C_2,\ n\,C_3\ \ldots\ n\,C_r\ \ldots\ n\,C_n$ என்பவை ஈருறுப்பு விரிவுக் குணகங்கள் (Binominal coefficients) எனப்படும்.

(iv) முதலிலிருந்து $(r + 1)$வது உறுப்பு $(x + 1)^n$ என்பதன் விரிவின் பொது உறுப்பு ஆகக் கொள்வது வழக்கம் இதை T_{r+1} என்று குறிப்போம். $T_{r+1} = n\,C_r\, x^{n-r}\, y^r$ என வருகிறது. கடைசியிலிருந்து $(r + 1)$ வது உறுப்பு T_{n-r+1} ஆகும்.

$$\therefore \quad T_{n-r+1} = n\,C_{n-r} x^r\ y^{n-r}$$

ஆனால் $n\,C_r = n\,C_{n-r}$ என்று முன்னரே காட்டப் பட்டுள்ளது.

ஆகவே T_{r+1}இன் குணகமும் T_{n-r+1}இன் குணகமும் சமமாகிறது.

அதாவது ஈருறுப்புக் கோவையின் விரிவில் குணகங்கள் இருபுறமிருந்தும் சமமாக அமைகின்றன. முதல் குணகம், கடைசியிலிருந்து முதல் குணகத்திற்குச் சமம்; இரண்டாவது குணகம், கடைசியிலிருந்து இரண்டாவது குணகத்திற்குச் சமம். இவை போன்று மற்றக் குணகங்களும் அமைகின்றன.

மாதிரி: $\left(2x + \frac{y}{3}\right)^{14}$ என்பதன் விரிவில் 12வது உறுப்பைக் கணக்கிடு.

பொதுச் சூத்திரம்: $(x + y)^n$ என்ற விரிவில்

$$T_{r+1} = n\,C_r\ x^{n-r} y^r$$

இங்கு $n = 14 \quad r = 11 \quad (r + 1 = 12$ ஆனதால்)

$$\text{“}x\text{”} = 2x \quad \text{“}y\text{”} = \frac{y}{3}$$

$$\therefore \quad T_{12} = {}_{14}C_{11}\ (2x)^3 \left(\frac{y}{3}\right)^{11}$$

$$= 14\,C_3\ 8 \cdot x^3 \frac{y^{11}}{3^{11}}$$

$$= \frac{8}{3^{11}}\ 14\,C_3\ x^3\ y^{11}$$

(இதற்கு மேல் குணகத்தைச் சுருக்கத் தேவையில்லை.)

பயிற்சி 23

காண்க:

1. $\left(2\,x + 1\right)^8$ என்பதன் விரிவில் 5வது உறுப்பு
2. $\left(2\,x + \frac{1}{x}\right)^{15}$ ... ... 10வது ,,
3. $\left(2\,y - \frac{x}{3}\right)^{10}$ ... ... 7வது ,,

4. $\left(2x^2 + \frac{1}{x}\right)^{12}$ ... ... 6வது „

5. $\left(\frac{4x^2}{3} - \frac{3}{2x^2}\right)^8$ ... ... 5வது „

6. $\left(\sqrt{a} - \frac{1}{a}\right)^{10}$ ... ... 7வது „

7. $\left(2\sqrt{a}\ b - \frac{1}{2b\sqrt{a}}\right)^{41}$ ... 6வது „

8. $\left(\sqrt[3]{m} - \frac{1}{m^2}\right)^4$ ... 3வது „

9. $\left(\frac{3}{x} - 2x\right)^{18}$ ... 8வது „

10. $\left(\frac{x\sqrt{y}}{5} - \frac{5}{y\sqrt{x}}\right)^{12}$ ... 7வது „

8·4 $(x+y)^n$ என்பதன் விரிவில் மைய உறுப்பு அல்லது உறுப்புக்கள்: விரிவில் $(n+1)$ உறுப்புக்கள் உள்ளதெனக் கண்டோம். n இரட்டைப்படை எண், $2m$ எனக்கொள்வோம். அப்போது $(m+1)$ வது உறுப்பு, அதாவது T_{m+1}, மைய உறுப்பு ஆகும். அதற்கு இருபுறமும் m உறுப்புக்கள் உள்ளன.

n ஒற்றைப்படை எண், அதாவது $2m-1$ எனக்கொண்டால் விரிவில் $2m$ உறுப்புக்கள் உள்ளன. அப்போது T_m m_1 T_{m+1} என இரண்டு மைய உறுப்புக்கள் உள்ளன.

மாதிரி: $\left(\frac{a\sqrt{b}}{3} - \frac{3}{b\sqrt{a}}\right)^{14}$ என்பதன் விரிவில் மைய உறுப்பைக் காண்க. விரிவில் 15 உறுப்புக்கள் உள்ளன.

∴ 8வது உறுப்பு மைய உறுப்பு ஆகும்.

$(x+y)^n$ இன் விரிவில் $T_{r+1} = n C_r\ x^{n-r}\ y^r$

இங்கு $n = 14$; $r = 7$; "x" $= \frac{a b^{1/2}}{3}$

'y' $= \frac{-3}{b a^{1/2}}$

$$\therefore\ T_8 = {}_{14}C_7 \left(\frac{a\, b^{1/2}}{3}\right)^7 \left(\frac{-3}{b\, a^{1/2}}\right)^7$$

$$= {}_{14}C_7\ \frac{a^7\, b^{7/2}}{3^7} + \frac{-3^7}{b^7\ a^{7/2}}$$

$$\therefore\ T_8 = -\ 14\ C_7\ \frac{a^{3/2}}{b^{3/2}}$$

$$= -\ 14\ C_7\ \frac{a}{b}\ \sqrt{\frac{a}{b}}$$

மாதிரி: $(1+x)^{2n}$ என்பதன் விரிவில் மைய உறுப்பு $\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\ \dots\ (2n-1)\cdot 2^n\ x^n}{\lfloor n}$ எனக் காட்டுக:

விரிவில் $(2n+1)$ உறுப்புக்கள் உள்ளன. ஆகவே மைய உறுப்பு T_{n+1} ஆகும்.

$$\therefore\ T_{n+1} = 2n\ C_n\ x^n$$

$$= \frac{\lfloor 2n}{\lfloor n\ \lfloor n}\ x^n$$

$$= \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\ \dots\ 2n}{\lfloor n\ \lfloor n}\cdot x^n$$

$$= \frac{(1\cdot 3\cdot 5\ \dots\ 2\overline{n-1})\,(2\cdot 4\cdot 6\ \dots\ 2n)}{\lfloor n\ \lfloor n}\ x^n$$

$$= \frac{(1\cdot 3\cdot 5\ \dots\ 2\overline{n-1})\,(1\cdot 2\cdot 3\ \dots\ n)}{\lfloor n\ \lfloor n}\ 2^n\ x^n$$

$$= \frac{(1\cdot 3\cdot 5\ \dots\ 2\overline{n-1})\ \lfloor n}{\lfloor n\ \lfloor n}\ 2^n\ x^n$$

$$= \frac{(1\cdot 3\cdot 5\ \dots\ 2\overline{n-1})}{\lfloor n}\ 2^n\cdot x^n$$

பயிற்சி 24

கீழே தரப்படும் விரிவுகளில் மைய உறுப்புக்களைக் காணவும்.

1. $\left(a+\frac{2}{a}\right)^{10}$
2. $\left(2a-\frac{1}{a}\right)^{12}$
3. $\left(x-\frac{1}{x}\right)^{16}$
4. $\left(2a^2+\frac{y}{a}\right)^{10}$

5. $\left(a^2 - 5\,ab^2\right)^6$ 6. $\left(3x - \dfrac{1}{2x^2}\right)^{10}$

7. $\left(\dfrac{a}{x} + \dfrac{x}{a}\right)^{16}$ 8. $\left(ax - \dfrac{1}{ax^2}\right)^7$

9. $\left(t + \dfrac{3}{t}\right)^9$ 10. $\left(\sqrt{x} - \dfrac{2}{\sqrt{x}}\right)^{11}$

11. $\left(x\sqrt{x} - \dfrac{2}{\sqrt{x}}\right)^{13}$

8·5. குறிப்பிட்ட அடுக்குள்ள உறுப்பின் குணகத்தைக் காண.

மாதிரி: $\left(x^4 - \dfrac{1}{x^8}\right)^{15}$ என்பதன் விரிவில் (i) x^{18} (ii) $\dfrac{1}{x^8}$ இன் குணகங்களைக் கணக்கிடுக.

$(x + y)^n$ என்பதன் விரிவில் $T_{r+1} = n\,C_r\; x^{n-r}\; y^r$

இங்கே $n = 15$ $r = ?$ "x" $= x^4$ "y" $= -\dfrac{1}{x^8}$

$$\therefore\quad T_{r+1} = 15\,C_r\;(x^4)^{15-r}\;\frac{(-1)^r}{(x^8)^r}$$

$$= 15\,C_r\;x^{60-4r}\;\frac{(-1)^r}{x^{8r}}$$

$\therefore$ x இன் அடுக்கு $60 - 7r$

x இன் அடுக்கு 18 ஆனல்

$60 - 7r = 18$

$\therefore\quad 7r = 42 \quad r = 6$

x^{18} வரும் உறுப்பு T_7 ஆகும்.

$$T_7 = 15\,C_6\;x^{36}\;\frac{(-1)^6}{x^{18}}$$

$$= 15\,C_6\;x^{18}$$

$\therefore$ x^{18} இன் குணகம் $15\,C_6$ ஆகும்.

(ii) x இன் அடுக்கு -3 ஆக வர

$60 = 7r = -3$

$\therefore\quad 7r = 63$

$r = 9$

$\therefore \quad \frac{1}{x^8}$ வரும் உறுப்பு T_{10} ஆகும்.

$$T_{10} = 15\,C_9\, x^{24} \frac{(-1)^9}{x^{27}}$$

$$= -15\,C_9 \frac{1}{x^3} = -15\,C_6 \cdot \frac{1}{x^3}$$

$\therefore \quad \frac{1}{x^8}$ இன் குணகம் $= -15\,C_6$ ஆகும்.

மாதிரி : $\left(x^2 - \frac{2}{3x}\right)^9$ என்பதன் விரிவில் x வராத உறுப்பைக் காணவும்.

[x இல்லை என்றால் x^0 என வரும். ஆனால் $x^0 = 1$ ஆனதால் x வராது. ஆகவே கணக்கு விரிவில் x^0இன் குணகம் என்ன என்பதாம்.]

$(x + y)^n$ என்பதன் விரிவில்

$T_{r+1} = nC_r\ x^{n-r}\, y^r$

இங்கு $n = 9;\ \ r = ?$

$$\text{“}x\text{”} = x^2 \quad \text{“}y\text{”} = \frac{-2}{3x}$$

$$\therefore \quad T_{r+1} = 9\,C_r\,(x^2)^{9-r} \frac{(-2)^r}{(3x)^r}$$

$$= 9\,C_r\, x^{18-2r} \frac{(-1)^r \cdot 2^r}{3^r \cdot x^r}$$

$\therefore \quad x$இன் அடுக்கு $18 - 2r - r = 18 - 3r$

x^0 எனவர $18 - 3r = 0$ ஆகவேண்டும்

$$\therefore \quad r = 6$$

$\therefore \quad T_7$ உறுப்பில் x வராது

$$T_7 = 9\,C_6\, x^6 \frac{(-1)^6 \cdot 2^6}{3^6 \cdot x^6}$$

$$= \frac{2^6}{3^6}\, 9\,C_3$$

பயிற்சி 25

1. $\left(2x + \frac{1}{2x}\right)^{11}$ என்பதன் விரிவில் x^3 இன் குணகம் காண்க
2. $\left(x^2 + \frac{a^3}{x}\right)^5$ ... ... x இன் ,, ,,
3. $(2 + x)^{12}$ ... ... x^7 இன் ,, ,,
4. $(x^2 + 2x)^{12}$ ... ... x^{16} இன் ,, ,,
5. $\left(\frac{x^2}{2} + \frac{1}{x}\right)^{17}$ ... ... x^{13} இன் ,, ,,
6. $(2x^2 - x)^{10}$ ... ... x^{16} இன் ,, ,,
7. $\left(2x + \frac{1}{3x^2}\right)^{11}$ ... ... $\frac{1}{x^7}$ இன் ,, ,,
8. $\left(3x - \frac{1}{3x}\right)^{20}$ ... ... $\frac{1}{x^8}$ இன் ,, ,,
9. $\left(\sqrt{x} + \frac{1}{x}\right)^{10}$ ... ... $\frac{1}{x^4}$ இன் ,, ,,
10. $\left(\sqrt{x} - \frac{2}{x^2}\right)^{12}$ ... ... $\frac{1}{x^6}$ இன் ,, ,,

கீழே தரப்படும் விரிவுகளில் x வராத உறுப்பைக் காணவும்.

11. $\left(x^2 + \frac{2}{x^2}\right)^{16}$ 12. $\left(2x - \frac{3}{x^2}\right)^{12}$ 13. $\left(\frac{2x}{3} - \frac{1}{x^2}\right)^9$

14. $\left(2x^2 - \frac{1}{x}\right)^{15}$ 15. $\left(2x^2 - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{10}$ 16. $\left(\frac{4}{3x^2} - \frac{3x}{2}\right)^9$

17. $\left(x + \frac{1}{x}\right)^{2n}$ 18. $\left(x - \frac{1}{x}\right)^{n2}$ 19. $\left(3x^2 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{10}$

20. $\left(\sqrt[3]{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)^{15}$.

8.6. $(x + y)^n$ **போன்ற ஈருறுப்புக் கோவையின் விரிவை எழுத**

(i) T_{r+1} என்ற உறுப்பை சூத்திரப்படி எழுதவும்.

(ii) அதைச் சுருக்கவும்.

(iii) அதில் வரும் 'r'க்கு $0, 1, 2 \cdot n$ என மதிப்புத்தர விரிவில் உள்ள எல்லா உறுப்புக்களும் வரும்.

மாதிரி: $\left(3x^2+\frac{2}{x}\right)^7$ என்பதன் விரிவை எல்லா உறுப்புக் களுடனும் எழுதவும்.

$$T_{r+1} = 7\,C_r \left(3\,x^2\right)^{7-r}\left(\frac{2}{x}\right)^r$$

$$= 7\,C_r\ 3^{7-r} \cdot x^{14-2r} \cdot \frac{2^r}{x^r}$$

$$= 7\,C_r\ 3^{7-r} \cdot 2^r \cdot x^{14-3r}$$

r க்கு $0, 1, 2, \ldots$ என 7 வரை மதிப்பிட

$$\left(3x^2+\frac{2}{x}\right)^7 = 3^7 \cdot x^{14} + 7C_1\, 3^6 \cdot 2x^{11} + 7\,C_2\, 3^5\, 2^2 \cdot x^8$$

$$+\ 7\,C_3\, 3^4 \cdot 2^3\, x^5 + 7\,C_4\, 3^3 \cdot 2^4 \cdot x^2 + 7\,C_5\, 3^2\, 2^5\, \frac{1}{x}$$

$$+\ 7\,C_6\, 3\cdot 2^6 \cdot \frac{1}{x^4} + 7\,C_7\, 2^7 \cdot \frac{1}{x^7}$$

$$= 3^7x^{14} + 3^6 \cdot 2 \cdot 7\,x^{11} + 3^5 \cdot 2^2 \cdot 21\,x^8 + 3^4 \cdot 2^3 \cdot 35\,x^5 +$$

$$3^3 \cdot 2^4\, 35\,x^2 + 3^2 . 2^5 \cdot 21 \cdot \frac{1}{x}$$

$$+\ 3\cdot 2^6 \cdot 7\ \frac{1}{x^4} + 2^7 . \frac{1}{x^7}$$

பயிற்சி 26

கீழ் வருபனவற்றின் விரிவை எல்லா உறுப்புக்களுடனும் எழுது

(1) $(2a+3b)^4$ · (2) $(2x+\frac{a}{2})^5$ · (3) $(2-\frac{x}{2})^6$

(4) $(2x+\frac{y}{2})^4$ (5) $(2\sqrt{x}-\frac{3}{x\sqrt{x}})^4$ (6) $\left(\frac{6x^2}{y^3}-\frac{y^2}{6x}\right)^8$

8·7. **ஈறுப்புக் கோவை விரிவின் குணகங்கள் :**

$(x+y)^n = x^n + nC_1\, x^{n-1}\, y + nC_2\, x^{n-2}\, y^2 + \ldots nC_r\, x^{n-r}\, y^r$ எனக் கூறினோம்.

nC_1, nC_2, nC_3 — . என்பவை ஈருறுப்புக் கோவை விரிவின் குணகங்கள் எனப் பெயர்பெறும். இவைகளை nC_1, C_2, $C_3 \ldots$ என எழுதுவது வழக்கம். கடைசிக் குணகம் Cn; முதல் குணகம் 1 ஐ C_0 என எழுதுவது வழக்கம். $n\,C_0$ என்பது 1 ஐக் குறிக்கும் என்று முன்னரே கூறியுள்ளோம்.

$(1+x)^n$ என்பதன் விரிவு: மேலே கூறிய $(x+y)^n$ என்பதன் விரிவில் $x=1$ எனவும் $y=x$ எனவும் மதிப்பிட $(1+x)^n = 1+nC_1 x+nC_2x^2+nC_3x^3+\ldots nC_r x^r + \cdot nC_n x^n$ என வருகிறது.

$$\therefore \quad (1+x)^n = C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + \cdot + C_r x^r + Cnx^n$$

நிரூபிக்க: (i) $C_0 + C_1 + C_2 \ldots + C_n = 2^n$

(ii) $C_0 + C_2 + C_4 \ldots = C_1 + C_3 + C_5 \ldots = 2^{n-}$

$(1+x)^n = C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + \cdot \qquad Cn\, x^n$

$x = 1$ என இரு புறமும் மதிப்பிட

$2^n = C_0 + C_1 + C_2 + C_3 - \cdot \qquad + Cn$

$\therefore \quad C_0 + C_1 + C_2 + \ldots Cn = 2^n$

[குறிப்பு: $C_1 + C_2 + \ldots Cn = 2^n - C_0 = 2^n - 1$]

$x = -1$ என மதிப்பிட

$0 = c_0 - c^4 + c_2 - c_3 + c_4 \ldots\ldots$

$\therefore \quad c_0 + c_2 + c_4 \ldots\ldots = c_0 + c_3 + c_5 \ldots\ldots$

ஆனால் இரண்டு பக்கமும் சேர்ந்து $c_0+c_1+c_2+c_3 \ldots\ldots = 2^n$

ஒவ்வொரு பக்கமும் $= \frac{1}{2} \cdot 2^n = 2^{n-1}$

$\therefore \quad c_0 + c_2 + c_4 \ldots\ldots \quad c_1 + c_3 + c_5 \ldots\ldots = 2^{n-1}$

[குறிப்பு:

${}_{n+1}c_0 + {}_{n+1}c_1 + \cdots$ என $(n+2)$ உறுப்புக்கள் $= 2^{n+1}$ 1

${}_{n-1}c_0 + {}_{n-1}c_1 + \cdots$ என n உறுப்புக்கள் $= 2^{n-1}$]

மாதிரி:

$c_0{}^2+c_1{}^2+c_2{}^2+c_3{}^2+ \ \ldots\ldots \quad c_3{}^2 = \frac{\lfloor 2n}{\lfloor n \ \lfloor n}$ என நிறுவுக

$(1+x)^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ \ldots\ldots \quad + c_n x^n$

$(x+1)^n = c_0 x^n + c_1 x^{n-1} + c_2 x^{n-2} + \ \ldots\ldots \quad + cn$

வலப்புறமுள்ள இரண்டு தொடர்களையும் பெருக்க அதில் வரும் x^n இன் குணகம் $= c_0{}^2 + c_1{}^2 + c_2{}^2 + \ \ldots\ldots\ cn^2$ இது இடது புறம் வரும் பெருக்கற் பலன் $(1+x)^{2n}$ இல் வரும் x^n இன் குணகத்திற்குச் சமம்.

$(1+x)^{2n}$ என்பதன் விரிவில் x^n இன் குணகம் $2n^{c}{}_{n} = \dfrac{|2n}{|n\;|n}$

$\therefore \quad c_0^2 + c_1^2 + c_3^2 + \;\ldots\ldots\; c_n^2 = \dfrac{|2n}{|n\;|n}$

மாதிரி: $3c_0+4c^1+5c_2+ \;\ldots\ldots\; + (n+3)\, c_n$ என்பதன் மதிப்பு

$$T_{n+1} = (n+3)\,c_n = nc_n + 3\cdot c_n$$

$$\therefore \; T_1 = 0 \quad + 3c_0$$

$$T_2 = 1\cdot c_1 + 3\cdot c_1$$

$$T_3 = 2\cdot c_2 + 3\cdot c_2$$

$$T_{n+1} = nc_n \; + 3\cdot c_3$$

கூட்டுத் தொகை $= X + Y$ ஆகுக. இங்கு,

$$Y = 3 \;\; (c_0 + c_1 + c_2 + c_3 \;\ldots\ldots\; c_n)$$

$$= \underline{3\cdot 2n}$$

$$X \equiv 1\cdot c_1 + 2\cdot c_2 + \;\ldots\ldots\; n.c_n$$

$$= 1\cdot n + 2\cdot \frac{n\,(n-1)}{1\cdot 2} + \frac{3\cdot n\,(n-1)\,(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3} + \;\ldots\ldots$$

$$= n\left[1 + (n-1) + \frac{(n-1)\,(n-2)}{1\cdot 2} + \;\ldots\ldots\;\right]$$

$$= n\left[{}_{n-1}c_0 + {}_{n-1}c_1 + {}_{n-1}c_2 \;\ldots\ldots\;\right]$$

$$= n\cdot 2^{n-1}$$

$\therefore$ கூட்டுத் தொகை $= n\cdot 2^{n-1} = 3\cdot 2^n$

$$= 2^{n-1}\;(n+6)$$

[இங்கு $c_1 + 2c_2 + 3\cdot c_3 \;\ldots\ldots\; + nc_n = n\cdot 2^{n-1}$ என்பது கவனிக்கத் தக்கது]

பயிற்சி 27

1. $(1+x)^{17}$ என்றதன் விரிவில் $(r-1)$வது உறுப்பு $3r$வது உறுப்புக்குச் சமம் என்றால் r இன் மதிப்பு என்ன?

2. $(1+x)^{20}$ என்றதன் விரிவில் $x = 2$ என மதிப்புக் கொடுத்தால் $(r+1)$ வது உறுப்பு r வது உறுப்பைப் போல 4 மடங்காகிறது. r இன் மதிப்பு என்ன?

3. $(1+x)^8$ என்றதன் விரிவில் $(2r+1)$ வது உறுப்பின் குணகத்திற்கும் $(2r-1)$ வது உறுப்பின் குணகத்திற்கும் உள்ள விகிதப் பொருத்தம் 2 : 5 என்ருல் 'r' இன் மதிப்பு என்ன?

4. $(7x+8)^{44}$ என்றதன் விரிவில் குணகங்கள் சமமாகவுள்ள அடுத்தடுத்த உறுப்புக்கள் யாவை?

5. $(10x+5)^{80}$ என்றதன் விரிவில் குணகங்தள் சமமாகவுள்ள அடுத்தடுத்த உறுப்புக்கள் யாவை?

6. $(1+ax)^n$ என்றதன் விரிவில் முதல் மூன்று உறுப்புக்கள் $1+6x+16x^2$ என்ருல் a_1 n இவற்றின் மதிப்பைக் காண்க.

7. கீழ்க் கண்ட தொடர்களின் கூடுதல் காண்க:

(i) $7c_1+12c_2+17c_3+ \ldots\ldots (5n+2)\,c_n$

(ii) $c_0+3c_1+5c_2+7c_n+ \ldots (2n+1)\,c_n$

(iii) $c_0+2c_1+3c_n+ \ldots\ldots\ldots (n+1)\,c$

நிறுவுக.

8. $C_0+\frac{C_1}{2}+\frac{C_2}{3}+\frac{C_3}{4} + \ldots \frac{C_n}{n+1} = \frac{2^{n+1}-1}{(n+1)}$

9. $C_0C_2+C_1C_3+C_2C_4+\ldots = \frac{\lfloor 2n}{\lfloor (n+2)\ \lfloor n-2}$

10. $\frac{C_1}{2}+\frac{C_3}{4}+\frac{C_5}{6} + \ldots = \frac{2^n-1}{(n+1)}$

11. $C_0C_1+C_1C_2+C_2C_3+\ldots+C_{n-1}C_n = \frac{\lfloor 2n}{\lfloor n+1\ \lfloor n-1}$

[குறிப்பு: $(1+x)^n\,(1+x)^n = (1+x)^{2n}$ என்பதைப் பயன்படுத்துக]

12. $C_0-\frac{C_1}{2}+\frac{C_2}{3} \quad \ldots \quad +\frac{(-1)^n\,C_n}{n+1} = \frac{1}{n+1}$

9. (i) எளிய எண்தொடர்கள்

9·1. எண்கள் ஒன்றன்பின் ஒன்ருக அமைந்து அவற்றின் மதிப்பு, அதன் வரிசை எண்ணின் (Rank Number) சார்பலனுக இருந்தால், எண்கள், தொடரில் அமைகின்றன எனப்படும். எண்ணின் வரிசை எண் 'n' ஆனுல் அது 'nவது உறுப்பு' (nth term) எனப்படும். அதை Tn எனக் குறிப்போம்.

மாதிரி: 'nவது உறுப்பு ($n + 2^n$) என்ருல் எண்தொடரின் முதல் ஐந்து எண்களை எழுதுக.

$n = 1, 2, 3, 4, 5$ எனப் பிரதியிடக் கிடைக்கும் எண்கள் $3, 6, 11, 20, 37$.

பயிற்சி 28

'nவது உறுப்பு தரப்பட்டுள்ளது. எண் தொடரின் முதல் ஐந்து உறுப்புக்களை எழுதுக.

1. $2n - 3$ 2. $5n + 4$ 3. $n^2 + 4$

4. $2^n + n - 1$ 5. $3^n - 1$ 6. $\dfrac{n-1}{n^3}$

9·2. **கூட்டுத்தொடர்** (Arithmetical Progression): ஒரு எண்ணுடன், அடுத்தடுத்துத் தொடர்ந்து ஒரே எண்ணைக் கூட்ட வரும் எண் தொடர், கூட்டுத் தொடர் எனப்படும். எந்த எண்ணுடன் முதலில் கூட்டினேமோ, அது முதல் எண் எனப்படும். கூட்டப்பட்ட எண் பொது வித்தியாசம் [common difference: (c. d)] எனப்படும்.

(எ-டு) (*i*) $3, 7, 11, 15$ என்ற எண் தொடரில் முதல் எண் 3; பொது வித்தியாசம் 4.

(ii) 11, 7, 3, – 1 ... என்ற தொடரில் முதல் **எண்** 11, பொது வித்தியாசம் – 4.

9·3. கூட்டுத் தொடரின் பொது உருவமும், *n*வது உறுப்பும் : $a, a + d, a + 2d, \ldots$ எனும் எண் தொடர் கூட்டுத் தொடரின் பொது உருவம். *n*வது உறுப்புவர *a*யுடன் பொது வித்தியாசம் $(n - 1)$ தடவை கூட்டவேண்டும்.

∴ 'a' என்பது முதல் எண், பொது வித்தியாசம் d ஆனல், கூட்டுத்தொடரின் *n*வது உறுப்பு $(T^n) = a + (n - 1)\,d$.

[**குறிப்பு :** சில இடங்களில் $(a + d)$, $(a + 2d)$, எனக் கொள்வது நலமாயிருக்கும் அப்போது

$T_n = (a + nd)$ ஆகும்].

பயிற்சி 29

1. கீழ் வரும் எண் தொடர்களில் *n*வது உறுப்பைக் காணலாம்.

(i) 1, 2, 3 ... (ii) 1, 3, 5 ... (iii) 2, 4, 6 ...

(iv) 5, 8, 11, 14... (v) 15, 12, 9 ... (vi) 4, 3½, 3...

(vii) $x + 2y,\ x + 5y,\ x + 8y\ \ldots$

(viii) $\dfrac{a + x}{a - x},\ \dfrac{2a}{a - x},\ \dfrac{3a - x}{a - x}.$

2. (i) 6, 8, 10, 12, ... என்ற தொடரில் 10வது உறுப்பு என்ன?

(ii) 2, 5, – 12, .. ,, 8வது உறுப்பு என்ன?

(iii) –9, –3 3 ,, 12வது உறுப்பு என்ன?

3. (i) –11, –9, –7 ..., என்ற தொடரில் 9 என்ற எண்ணின் வரிசை எண் யாது.

(ii) 9, 15, 21 என்ற தொடரில் 183 என்ற எண்ணின் வரிசை எண் யாது.

(iii) $\frac{2}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}$ என்ற தொடரில் $\frac{17}{6}$ என்ற எண்ணின் வரிசை எண் யாது.

4. ஒரு கூட்டுத் தொடரில் 7வது உறுப்பு 35 ; 20வது உறுப்பு –4 என்ருல் அதில் 12வது உறுப்பு என்ன ?

5. ஒரு கூட்டுத் தொடரில் 5வது உறுப்பு 26 ; 12வது உறுப்பு 61 என்ருல் முதல் மூன்று உறுப்புக்களை எழுதுக.

6. ஒரு கூட்டுத் தொடரில் 2வது உறுப்பு $(2a-b)$ 6வது உறுப்பு $(6a+3b)$ என்றால் A · P என்ன?

7. ஒரு கூட்டுத் தொடரில் 3வது 7வது உறுப்புக்களின் கூடுதல் 36; 5வது 6வது உறுப்புக்களின் கூடுதல் 40. எண் தொடர் என்ன?

8. ஒரு கூட்டுத் தொடரில் Pவது உறுப்பு q; qவது உறுப்பு P என்றால் தொடர் என்ன?

9. ஒரு கூட்டுத் தொடரில் γவது உறுப்பு $2r$வது உறுப்பைப் போல் இரு மடங்கு என்றால் $3r$வது உறுப்பின் மதிப்பு பூச்சியம் எனக் காட்டு.

10. ஒரு கூட்டுத் தொடரில் Pவது உறுப்பு r^2 qவது உறுப்பு 9^2 என்றால் முதல் உறுப்பு என்ன? பொது வித்தியாசம் என்ன?

9·4. **கூட்டுத் தொடரில் n எண்களின் கூடுதல்.** 2, 9, 16, 23, 30, 37, 44 என்ற 7 எண்கள் கூட்டுத் தொடரில் உள்ளன. அவைகளின் கூடுதலை S_7 எனக் குறிப்போம்.

அப்போது $S_7 = 2+9+16+23+30+37+44$

மாற்றி எழுத $S_7 = 44+37+30+23+16+9+2$

$$\therefore\ 2S_7 = 46+46+46+46+46+46+46$$
$$= 7 \times 46$$
$$\therefore\ S_7 = \frac{7}{2} \times 46 = 161$$

இத்தகைய முறையைப் பொதுத் தொடருக்கும் பயன் படுத்துவோம்.

பொதுத் தொடரில் n எண்களின் கூடுதல். கடைசி எண்ணை l என்று குறிப்போம். தொடர் $a, a+d, a+2d \quad + l$ என்றால் மாற்றி எழுத வரும் தொடர் $l, l-d, (l-2d) \ldots\ a$ ஆகும் n எண்களின் S_n எனக் குறித்தால்

$$S_n = a + (a+d) + (a+2d) \ldots \quad + l$$

அதுவே $S_n = l + (l-d) + (l-2d) \ldots \quad + a$

கூட்ட $2S_n = (l+a) + (l+a) + \quad \ldots$ n உறுப்புக்கள்

$$= n(a+l)$$

(i) $\therefore\ S_n = n\dfrac{(a+l)}{2}$

[முதல் எண், கடைசி எண்களின் சராசரியைப் போல n மடங்கு].

ஆனால் l = nவது உறுப்பு = $a + (n-1)d$

$$\therefore \; S_n = \frac{n}{2}\left[2a + (n-1)d\right]$$

மாதிரி: 300, 500 என்ற இரு எண்களுக் கிடையேயுள்ள 11ஆல் வகுபடும் எண்களின் கூடுதல் யாது?

$300 = 27 \times 11 + 3$

$500 = 45 \times 11 + 5$

11ஆல் வகுபடும் எண்களின் எண்ணிக்கை $45 - 27 = 18$

முதல் எண் = 308 $(27 \times 11 + 11)$

கடைசி எண் = 495 (45×11)

$\therefore$ கூடுதல் = $\frac{18}{2} \times 803 = 7227$

மாதிரி: 13, 11, 9, என்ற எண் தொடரில் எத்தனை எண்களின் கூடுதல் -480 ஆகும்.

சூத்திரம் $Sn = \frac{n}{2}\left\{2a + n - 1a\right\}$

$a = 13$; $a = -4$; $Sn = -480$.

இவற்றைப் பிரதியிட்டுச் சுருக்கக் கிடைக்கும்

சமன்பாடு $n^2 - 14^n - 480 = 0$

$(n + 16)(n - 30) = 0$

$\therefore n = 30$ அல்லது -16

$\therefore$ எண்களின் எண்ணிக்கை 30 ஆகும்.

[எண்ணிக்கையை எதிரெண்ணில் சொல்வதில்லை ஆகையால் -16 பொருந்தாது].

பயிற்சி 80

1. கடைசி எண்ணைக் கண்டு கூடுதல் காண்.

(i) $1 + 4 + 7 + 10 + 13 + \ldots$ 23 உறுப்புக்களின்

(ii) $1 + 2 + 3 + 4 + \ldots$ 72 ,, ,,

(iii) $\frac{1}{2} + \frac{5}{6} + \frac{7}{6} \ldots$ 15 உறுப்புக்களின்

2. கூடுதல் காண்க

(i) $5 + 14 + 23 + 32 \ldots$ 16 உறுப்புக்கள்

(ii) $5 + 8\frac{1}{4} + 11\frac{1}{2} + \ldots$ 20 ,, ,,

(iii) $(a-b)^2 + (a^2 + b^2) + (a+b)^2$ 5 உறுப்புக்கள்

3. 100க்கும் 200க்கும் இடையேயுள்ள ஒற்றைப்படை எண்களின் கூடுதலைக் கணக்கிடு.

4. 200க்கும், 500க்கும் இடையேயுள்ள 7ஆல் வகுபடும் எண்களின் கூடுதல் என்ன ?

5. 150க்கும் 350க்கும் இடையேயுள்ள 15ஆல் வகுபடும் எண்களின் கூடுதல் கணக்கிடு.

6. 2, 7, 12, என்ற தொடரில் 632 கூடுதல்வர எத்தனை எண்கள் எடுக்கவேண்டும்.

7. 5, 11, 17, என்ற தொடரில் 616 கூடுதல் தரும் எண்களின் எண்ணிக்கை யாது ?

8. ஒரு கூட்டுத் தொடரில் p உறுப்புக்களின் கூடுதல் q; q உறுப்புக்களின் கூடுதல் r என்றால் $(p+q)$ உறுப்புக்களின் கூடுதல் என்ன ?

9. S_n, S_{2n}, S_{3n}, என்பவை ஒரு கூட்டுத் தொடரில் n, $2n$, $3n$ உறுப்புக்களின் கூடுதல் என்றால் $S_{3n} = 3(S_{2n} - S_n)$ எனக் காட்டு.

9·5. **கூட்டிடை எண்கள்** (Arithmetic means): 'x' 'y' என்பவை இரண்டு எண்களாகுக. $x_1\ a_1\ a_2\ a_3 \ldots\ a_n$, y, எனும் எண்கள் கூட்டுத்தொடரில் அமைந்தால், a_1, a_2 ... a_n எனும் எண்கள் கூட்டிடை எண்கள் எனப்படும்.

இரண்டு எண்களிடையே, 'n' கூட்டிடை எண்கள் காண.

'x' 'y' என்பவை இரண்டு எண்களாகுக.

a_1, a_2, a_3 ... a_n என்பவை 'n' கூட்டிடை எண்களாகுக.

$\therefore\ x_1\ a_1, a_2 \ldots a_3 \ldots a_n$, y என்பது கூட்டுத்தொடர். முதல் எண் x ; y என்பது $(n+2)$வது எண் ; 'd' என்பது பொது வித்தியாசமானால் $y = x + (n+1)d$

$$\therefore\ (n+1)d = y - x$$

$$\therefore\ d = \frac{y-x}{(n+1)}$$

$\therefore\ a_r$ எனும் கூட்டிடை எண் $(r+1)$ வது எண்.

$$\therefore\ a_r = x + rd = x + \frac{r(y-x)}{(n+1)}$$

சுருக்க $a_r \quad = \dfrac{(n+1)x + r(y-x)}{(n+1)}$ என வருகிறது.

rக்கு 1, 2, 3 ... என n வரை மதிப்பிட xக்கும் yக்குமிடையே 'n' கூட்டிடை எண்கள் கிடைக்கின்றன.

மாதிரி: 11க்கும் 87க்கும் இடையே 49 கூட்டிடை எண்களைக் காண்க.

$11 \; a_1 \; a_2 \ldots \; a_{49}.\; 87$ எனும் எண்கள் கூட்டுத்தொடர்.

87 என்பது 51வது எண். 'd' என்பது பொது வித்தியாசமானால்

$$50d = 87 - 11$$
$$= 76$$
$$\therefore \; d = \frac{76}{50} = 1{\cdot}52$$

$\therefore \; a_r = 11 + 1{\cdot}52r$

rக்கு 1, 2, 3 ... என 49 வரை மதிப்பிட 49 கூட்டிடை எண்கள் வருகின்றன.

பயிற்சி 31

1. 3க்கும் 85க்கும் இடையே 20 கூட்டிடை எண்கள் காண்க.
2. 5, 15க்கு இடையே 9 கூட்டிடை எண்கள் காண்க.
3. $1^{1/3}$, $4^{2/3}$க்கு இடையே 12 கூட்டிடை எண்கள் காண்க.
4. $(a+b)$, $(2a-b)$க்குமிடையே 2 கூட்டிடை எண்கள் காண்க.

9.6. பலவகைக் குறிப்புகள்.

குறிப்பு 1: கூட்டுத் தொடரில் உள்ள ஒவ்வொரு எண்ணுடன் ஒரே எண்ணைக் கூட்டவோ, அல்லது எண்ணிலிருந்து ஒரே எண்ணை நீக்கவோ, வரும் எண் தொடர், அதே பொது வித்தியாசமுடைய எண் தொடராகும்.

(எ—டு) $x, \; x+d, \; x+2d \; \ldots \; x+3d \; \ldots$ என்பது கூட்டுத் தொடர்

$x+a, \; x+a+d \;\; x+a+2d \; \ldots$ என்பதுவும் கூட்டுத் தொடராகும்

குறிப்பு 2: கூட்டுத் தொடரில் உள்ள எண்களை ஒரே எண்ணால் பெருக்கவோ, வகுக்கவோ வரும் எண்களும் கூட்டுத் தொடரில் அமைகின்றன.

(எ—டு) $a, a+d, a+2d \ldots$ என்பவை கூட்டுத் தொடர்
$ka, ka+kd\ ka+2kd.$ என்பவையும் கூட்டுத் தொடர்

குறிப்பு 3: $T_1, T_2\ T_3 \ldots\ T_n$ எனும் எண்கள் கூட்டுத் தொடரானால் $T_1 + T_n = T_2 + T_{n-1} = T_3 + T_{n-2}$ என வருகிறது.

குறிப்பு 4: a, b, c என்பவை கூட்டுத் தொடரில் ஆனால் $(a-b) = (b-c)$ அல்லது $2b = a + c$ ஆகும்.

பலவகைக் கணக்குகள்

மாதிரி கூட்டுத் தொடரில் உள்ள மூன்று எண்களின் கூடுதல் 24, அவற்றின் பெருக்கற் பலன் 384 என்றால் எண்களைக் காண்க.

மூன்று எண்கள் $a-d,\ a,\ a+d$ ஆகுக.

அவற்றின் கூடுதல் $= 3a = 24 \quad \therefore a = 8$

பெருக்கற் பலன் $(a^2 - d^2)\, a = 384$

$$\therefore 8\ (64 - d^2) = 384$$
$$64 - d^2 = 48$$
$$d^2 = 16$$
$d = 4$ அல்லது -4

$\therefore$ எண்கள் $4,\ 8,\ 12$

[மூன்று எண்கள் கூட்டுத் தொடரில் என்றிருந்தால் $(a - d)$, a, $(a + d)$ எனக் கொள்வது நலம்].

மாதிரி 2. நான்கு விகிதமுறு எண்கள் கூட்டுத் தொடரில் உள்ளன. அவற்றின் கூடுதல் 16. பெருக்கற்பலன் 105 என்றால் எண்கள் என்ன? எண்கள், $(a-3d)$, $(a-d)$, $(a+d)$ $(a+3d)$ ஆகுக.

கூடுதல் $4a = 16 \quad \therefore a = 4$

பெருக்கற்பலன் $(a^2 - 9d^2)(a^2 - d^2) = 105$

$$a^4 - 10\,a^2 d^2 + 9\,d^4 = 105$$
$$256 - 160\ d^2 + 9\,d^4 = 105$$
$$\therefore 9\,d^4 - 160\ d^2 + 151 = 0$$
$$(9\,d^2 - 151)(d^2 - 1) = 0$$
$d^2 = 1$ அல்லது $\frac{151}{9}$

$d = \pm 1$ அல்லது $\pm \frac{\sqrt{151}}{3}$

எண்கள் விகிதமுறு எண்களானதால் $d = 1$ எனும் மதிப்பைக் கொள்க.

$\therefore$ எண்களாவன : 1, 3, 5, 7

மாதிரி : a, b, c என்பவை கூட்டுத் தொடரானுல் $(b + c)^2 - a^2$, $(c + a)^2 - b^2$, $(a + b)^2 - C^2$ என்பவையும் கூட்டுத் தொடரில் அமையும் என நிறுவுக.

எண்கள் : $(b + c)^2 - a^2$, $(c + a)^2 - b^2$, $(a + b)^2 - c^2$ A · Pயில் இருந்தால் ஒவ்வொன்றையும் $(a + b + c)$ஆல் வகுக்க வரும் எண்கள் $(b + c - a)$, $(c + a - b)$, $(a + b - c)$யும் A · Pயில் இருக்க வேண்டும்.

இவற்றிலிருந்து $a + b + c$ஐக் கழிக்க வரும் எண்கள் $-2a$, $-2b$, $-2c$யும் A P ஆகவேண்டும். -2ஆல் ஒவ்வொரு எண்ணையும் வகுக்கு வரும்.

a, b, cயும் A · Pஆக வேண்டும் ஆனுல் a, b, c என்பவை A · P எனத் தரப்பட்டுள்ளது. ஆகவே $(b+c)^2 - a^2$; $(c+a)^2 - b^2$, $(a+b)^2 - c^2$ எனும் எண்களும் A · Pயில் அமைகின்றன.

பயிற்சி 32

1. கூட்டுத் தொடரில் உள்ள மூன்று எண்களின் கூடுதல் 27 ; அவற்றின் பெருக்கற் பலன் 504 என்ருல் எண்கள் என்ன ?

2. கூட்டுத் தொடரில் உள்ள மூன்று எண்களின் கூடுதல் 27 ; அவைகளின் வர்க்கங்களின் கூடுதல் 224 எண்களைக் காண்க.

3. நான்கு எண்கள் கூட்டுத் தொடரில் உள்ளன. கடை இரண்டு எண்களின் பெருக்கற் பலன், முதலிரண்டு எண்களின் பெருக்கற் பலனை விட 66 அதிகம். இடை இரண்டு எண்களின் பெருக்கற் பலன் 28 ; என்ருல் எண்களைக் காண்க.

4. கூட்டுத் தொடரில் உள்ள ஐந்து எண்களின் கூடுதல் 30 ; நடு எண்ணின் வர்க்கம், முதல், கடை எண்களின் பெருக்கற் பலனை விட 16 அதிகம் என்ருல் எண்கள் யாவை ?

5. $\frac{a}{b + c}$, $\frac{b}{c + a}$, $\frac{c}{a + b}$ கூட்டுத் தொடரானுல் $\frac{1}{b + c}$, $\frac{1}{c + a}$, $\frac{1}{a + b}$ யும் அவ்வாறே எனக் காட்டு.

6. $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$, $\frac{1}{c}$, கூட்டுத் தொடரானுல்

(i) $\frac{b+c}{a}, \frac{c+a}{b}, \frac{a+b}{c}$யும் கூட்டுத் தொடர் எனக் காட்டு.

(ii) $\frac{b+c-a}{a}, \frac{c+a-b}{b}, \frac{a+b-c}{c}$யும் கூட்டுத் தொடர் எனக் காட்டு.

(ii) ஆர்மானிக்குத் தொடர்
(Hormonic Progression. H.P.)

9·7 எண் தொடரில் வரிசையாகவுள்ள எண்களின் தலைகீழ்ப் பின்னங்கள், கூட்டுத் தொடரிலிருந்தால் அத்தகைய எண்களின் தொடர் ஆர்மானிக்கத் தொடர் எனப்படும்.

ஆதலால், $\frac{1}{a}, \frac{1}{a+d}, \frac{1}{a+2d}, \ldots$ எனும் தொடர் ஆர்மானிக்குத் தொடராகும். இதன் $\frac{n}{—}$வது உறுப்பு $\frac{1}{a+(n-1)d}$ ஆகும்.

ஆகவே ஆர்மானிக்குத் தொடர் கணக்குகள், கூட்டுத் தொடர் கணக்குகள் என்றே கூறலாம்.

மாதிரி: ஒரு ஆர்மானிக்குத் தொடரில் r வது q வது r வது உறுப்புக்கள் முறையே a, b, c என்றால் $bc\,(q-r)+ca(r-r)+ab\,(r-q)=o$ எனக் காட்டு.

ஆர்மானிக்குத் தொடர் $\frac{1}{x+d}, \frac{1}{x+2d}, \frac{1}{x+3d}, \ldots$ ஆகுக

$$\therefore\ r \text{ வது உறுப்பு} = \frac{1}{x+rd} = a$$

$$\therefore\ \frac{1}{a} = x+rd$$

இதேபோல $\frac{1}{b} = x+qd$

$$\therefore\ \frac{1}{a} - \frac{1}{b} = d\,(p-q)$$

$$\therefore \quad (b - a) = d \cdot ab\,(p - q)$$

இதேபோல $(c - b) = d \cdot bc\,(q - r)$

$$(a - e) = d\,ca\,(r - r)$$

$\therefore$ கூட்ட $O = d \sum bc\,(q - r)$

$$\therefore \quad bc\,(q - r) + ca\,(r - r) + ab\,(r - q) = O$$

9·8 **ஆர்மானிக்கு இடை எண்கள் (Harmonic means : H.M.)** இரண்டு எண்களிடையே, பல எண்கள், அவ்வெண்களுடன் ஆர்மானிக்குத் தொடரில் இருந்தால், அவை ஆர்மானிக்கு இடை எண்கள் எனப் பெயர் பெறும்.

x, y என்ற இரு எண்களிடையே 'n' ஆர்மானிக்கு இடை எண்களைக் காண :

இடை எண்கள் h_1, h_2, h_3 ....., h_n ஆகுக. அப்போது $x\, h_1\, h_2 \ldots h_n\; y$ எனும் $(n+2)$ எண்கள் ஆர்மானிக்குத் தொடரில் உள்ளன.

$\therefore \quad \frac{1}{x}, \frac{1}{h}, \frac{1}{n_2} + \ldots \frac{1}{y}$ என்பவை A P ஆகும். இதன் பொது வித்தியாசம் d ஆகும். $\frac{1}{y}$ என்பது $(n + 2)$ வது உறுப்பு ஆவதால்

$$(n + 1)\, d = \frac{1}{y} - \frac{1}{x} = \frac{x - y}{xy}$$

$$\therefore \quad d = \frac{(x - y)}{(n + 1)\, xy}$$

$$\therefore \quad \frac{1}{hr} = \frac{1}{x} + \frac{r\,(x - y)}{(n + 1)\, xy}$$

$$= \frac{(n+1)\, y + r\,(x - y)}{(n + 1)\, xy}$$

$$\therefore \quad hr = \frac{(u + 1)\, xy}{(n+1)\, y + r\,(x - y)}$$

ஆகவே n ஆர்மானிக்கு இடை எண்களாவன :

$$\frac{(n+1)\, xy}{(n+1)\, xy + r\,(x - y)} \quad (r = 1, 2, \ldots n)$$

(இவ்வாறு எழுதுவது கணிதத்தில் வழக்கம். இதற்குப் பொருள் rக்கு, 1, 2, ... n வரைப் பிரதியிட வரும் n எண்கள் என்பதாம்)

குறிப்பு 1: x, H, y என்ற மூன்று எண்கள் ஆர்மானிக்குத் தொடரிலிருந்தால்,

$$H = \frac{2xy}{x+y}$$

குறிப்பு 2: a, b, c, என்பவை ஆர்மானிக்குத் தொடரானல் $\frac{a-b}{b-c} = \frac{a}{c}$ எனக் காணலாம்.

$\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}$ கூட்டுத் தொடராகையால்

$\frac{2}{b} = \frac{1}{a} + \frac{1}{c}$ எனவும் வருகிறது.

பயிற்சி 33

1. கீழே தரப்படும் எண்களிடையே ஒரு ஆர்மாணிக்கு இடை எண் காண்க:

(i) 3, 15 (ii) 10, 15, (iii) 2, $\frac{5}{6}$ (iv) 7, $\frac{3}{14}$

(v) $\frac{x-y}{x+y}$ $\frac{x+y}{x-y}$ (vi) $(x-a)$, $(x+a)$

2. $4\frac{1}{2}$, $\frac{9}{14}$ என்ற எண்களிடையே 3 H. M. காண்க

3. $1\frac{1}{5}$, $\frac{3}{7}$,, ,, 5 ,, ,,

4. $\frac{2}{3}$, $\frac{2}{13}$,, ,, 4 ,, ,,

5. (i) $\frac{1}{2}, \frac{4}{9}, \frac{2}{5}$ என்ற ஆர்மானிக்குத் தொடரில் 5வது உறுப்பு என்ன?

(ii) $\frac{1}{3}, \frac{3}{7}, \frac{3}{5}$ என்ற ஆர்மானிக்குத் தொடரில் 8வது உறுப்பு என்ன?

(iii) $-\frac{2}{7}, -1, \frac{2}{3}$ என்ற ஆர்மானிக்குத் தொடரில் 7வது உறுப்பு என்ன?

6. ஒரு ஆர்மானிக்குத் தொடரில் 12வது உறுப்பு $\frac{1}{5}$ 19வது உறுப்பு $\frac{3}{22}$ என்ருல் 4வது உறுப்பு என்ன ?

7. ஆர்மானிக்குத் தொடரில் உள்ள மூன்று எண்களின் கூடுதல் $-\frac{4}{135}$ என்ருல் எண்கள் என்ன?

8. ஒரு ஆர்மானிக்குத் தொடரில் rவது உறுப்பு q, qவது உறுப்பு r என்ருல் $(p+q)$வது உறுப்பு என்ன ?

9. இரண்டு எண்களிடையே அமையும் n கூட்டிடை எண்களில் முதல் இடை எண் r; அதே எண்களிடையே அமையும் n ஆர்மானிக்கு இடை எண்களில் முதல் இடை எண் q என்ருல் qஇன் மதிப்பு r, $\left(\frac{n+1}{n-1}\right)^2 r$ என்ற எண்களிடையே அமையாது எனக் காட்டு.

10. ஒரு கூட்டுத் தொடரில் n எண்கள் உள்ளன ; அதில் முதல் எண் a; கடை எண் b. a, bஐ முதல் கடை எண்களாகக் கொண்டு n எண்கள் ஆர்மானிக்குத் தொடரிலும் உள்ளன. கூட்டுத் தொடரின் rவது உறுப்பையும், ஆர்மானிக்குத் தொடரின் $(n-r+1)$வது உறுப்பையும் பெருக்க $a\,b$ வரும் எனக் காட்டு.

(iii) பெருக்குத் தொடர்

ஒரு எண்ணை அடுத்தடுத்துத் தொடர்ந்து ஒரே எண்ணுல் பெருக்கவரும் எண் தொடர் பெருக்குத் தொடர் (Geometric Progression : G. P.) எனப்படும். பெருக்கும் எண் "பொது விகிதம்" (Common ratio : C. R.) எனப்படும்.

'a' என்பது முதல் எண்ணுகவும், 'r' என்பது பெருக்கும் எண்ணுகவும் ஆனுல் தொடர் $a, ar, ar^2, ar^3 \ldots$ என வருகிறது.

9·9 பெருக்குத்தொடரில் nவது உறுப்பு. முதல் எண் 'a' ஆகுக.

முதல் எண்	a
2வது எண்	ar
3வது எண்	ar^2
4வது எண்	ar^3

ஆகவே 'r' இன் அடுக்கு வரிசை எண்ணை (Rank number)விட 1 குறைவு.

$\therefore$ nவது எண் ar^{n-1} ஆகும்.

[**குறிப்பு:** சில கணக்குகளில் முதல் எண் 'ar' எனக் கொள்வது நலம். அப்போது nவது எண் ar^n ஆகும்.]

மாதிரி: ஒரு பெருக்குத்தொடரில் இரண்டாவது எண் 6; ஐந்தாவது எண் 48 என்றால் 10வது எண்ணைக் காண்க.

பெருக்குத் தொடர் $a, ar, ar^2 \ldots$ ஆகுக.

$\therefore$ 2வது எண் $ar = 6$

5வது எண் $ar^4 = 48$

$$\therefore r^3 = 8$$

$$\therefore r = 2$$

$$\therefore a = 3$$

$\therefore$ 10வது எண் $= ar^9$

$$= 3 \cdot 2^9$$

$$= 1536$$

மாதிரி: மூன்று எண்கள் பெருக்குத்தொடரில் உள்ளன. அவற்றின் கூடுதல் 21; பெருக்கற் பலன் 64 என்றால் எண்களைக் காண்க.

G. Pயில் உள்ள எண்கள் $\frac{a}{r}, a, ar$

அவற்றின் பெருக்கற் பலன் $a^3 = 64$

$$\therefore a = 4$$

அவற்றின் கூடுதல் $= \frac{a}{r} + a + ar = 21$

$$\therefore \frac{4}{r} + 4 + 4r = 21$$



$$\therefore \quad 4r^2 + 4r + 4 = 21r$$

$$\therefore \quad 4r^2 - 17r + 4 = 0$$

$$(4r-1)(r-4) = 0$$

$\therefore \quad r = 4$ அல்லது $\frac{1}{4}$.

$\therefore$ எண்கள் 1, 4, 16.

ஒரு பெருக்குத்தொடரில் Pஆவது qஆவது rஆவது எண்கள் முறையே a, b, c என்றால் $a^{q-r}, b^{r-p}, c^{p-q} = 1$ எனக்காட்டு.

பெருக்குத்தொடர் $xm, xm^2, xm^3 \ldots$ ஆகுக.

[இங்கு a, r எனும் எழுத்துக்கள் ஏற்கனவே கணக்கில் உள்ளதால் பெருக்குத் தொடர் இவ்வாறு எழுதுகிறோம்].

rஆவது எண் $= xm^p = a \quad \therefore \quad a^{q-r} = x^{q-r} \cdot m^{p(q-r)}$

qஆவது எண் $= xm^q = b \quad \therefore \quad b^{r-p} = x^{r-p} \quad m^{q(r-p)}$

rஆவது எண் $= xm^r = e \quad \therefore \quad e^{r-q} = x^{p-q} \quad m^{r(p-q)}$

$\therefore \quad a^{q-r} \cdot b^{r-p} \cdot c^{r-q} = x^{\sum(q-r)}, m^{\sum p(q-r)} = x^0 m^0 = 1.$

9·10 **பெருக்குத்தொடரிடை எண்கள்.** (Geometric Means G. M.) $a, g_1, g_2, g_3 \ldots g_n, b$ என்பவை பெருக்குத் தொடரில் இருந்தால், $g_1, g_2, g_3 \ldots g_n$ என்பவை 'a', 'b' எனும் இரு எண்களிடையே அமையும் 'பெருக்கு இடை எண்கள்' எனப்படும்.

இரு எண்களிடையே 'n' பெருக்கிடை யெண்கள் காண : 'a', 'b' என்ற இரு எண்களிடையே $g_1\ g_2\ g_3 \ldots g_n$ என 'n' பெருக்கிடை எண்களாகுக. இந்தத் தொடரின் பொது விகிதம் 'r' ஆகுக :

முதல் எண் 'a'

$(n+2)$வது எண் 'b' (இடையே n எண்கள் இருப்பதால்)

$$\therefore \quad b = ar^{n+1}$$

$$\therefore \quad r = \sqrt[n+1]{\frac{b}{a}} = \left(\frac{b}{a}\right)^{1/n+r}$$

$$\text{பெருக்கிடை எண்கள்} = a\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{s}{n+1}}$$

($s = 1, 2, 3 \ldots n$ வரை பிரதியிட).

குறிப்பு: a, b, c என மூன்று எண்கள் S · Pயில் இருந்தால் $b = \sqrt{ac}$ a, cக்கு இடையேயுள்ள பெருக்கிடை எண் $\sqrt{ac}$ ஆகும்.

9·11 **பெருக்குத்தொடரில் உள்ள எண்களின் கூடுதல் தரும் சூத்திரம் காண:** a, ar, ar^2 ... என்பவை பெருக்குத் தொடரிலாகுக. S_n என்பது முதல் 'n' எண்களின் கூடுதல் ஆகுக.

$$\therefore \quad S_n = a + ar + ar^2 + \dots + ar^{n-1}$$
$$\therefore r \cdot s_n = \quad ar + ar^2 \quad + ar^{n-1} + ar^n$$
$$\therefore S_n (1-r) = a - ar^n = a(1-r^n)$$
$$\therefore \quad S_n = a\frac{(1-r^n)}{(1-r)} \text{ அல்லது } \frac{a(r^n-1)}{r-1}$$

[முதல் சூத்திரம் $r<1$ எனும் போதும் இரண்டாவது $r>1$ எனும் போதும் பயன்படுத்தப்படும்.]

மாதிரி: $2+6+18+54+$ ... என்ற தொடரில் n உறுப்புக்களின் கூடுதல் காண்க.

முதல் எண் 2; பொது விகிதம் 3 ஆகவே 'n' எண்களின் கூடுதல் $\left\{ a\frac{(r^n-1)}{r-2} \right.$ எனும் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்த$\left. \right\}$

$$2 \cdot \frac{3^n-1}{3-1} = 3^n - 1$$

பயிற்சி 34

1. (i) 1, 3, 9, 27 ... என்ற தொடரில் 9வது எண் காண்க
   (ii) 2, 8, 32 ... ,, 6வது ,,
   (iii) $-1, \frac{1}{3} - \frac{1}{9}$ ... ,, 7வது ,,
   (iv) $x, -\frac{a}{x}\ \frac{a^2}{x^2}$ ... ,, nவது ,,

2. ஒரு பெருக்குத் தொடரில் 5வது எண் 768. பொது விகிதம் 4. தொடரை எழுதுக.

3. ஒரு பெருக்குத் தொடரில் 7வது எண் $2\frac{1}{4}$, பொது விகிதம் $\frac{1}{2}$ என்றால் தொடரை எழுதுக.

4. 4து எண் 8 ஆகவும், 9வது எண் 256 ஆகவும் உள்ள பெருக்குத் தொடரில் 'n' வது எண் என்ன?

5. 6, 96, என்ற எண்களிடையே 3 பெருக்கிடை எண்கள் காண்க.

6. $\frac{32}{9}$, $\frac{81}{2}$ என்ற எண்களிடையே 5 பெருக்கிடை எண்கள் காண்க.

7. 14, $\frac{-7}{64}$ என்ற எண்களிடையே 6 பெருக்கிடை எண்கள் காண்க.

8. பெருக்குத் தொடரில் உள்ள மூன்று எண்களின் கூடுதல் 26; அவற்றின் பெருக்கற் பலன் 216. எண்களைக் காண்க.

9. பெருக்குத் தொடரில் உள்ள மூன்று எண்களின் கூடுதல் 7; அவற்றின் வர்க்கங்களின் கூடுதல் 21. எண்களைக் காண்க.

10. பெருக்குத் தொடரில் உள்ள எண்களில் முதல் மூன்று எண்களின் கூடுதல் 26; இரண்டாவது மூன்று எண்களின் கூடுதல் 702; தொடரைக் காண்க.

11. கூடுதல் காண்க:

(i) $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots\ldots$ (12 உறுப்புக்களின்)
(ii) $\frac{3}{4} + 1\frac{1}{2} + 3 + \ldots\ldots$ (9 உறுப்புக்களின்)
(iii) $1 + \sqrt{3} + 3 + \ldots\ldots$ (12 உறுப்புக்களின்)

12. 'n' எண்களின் கூடுதல் காண்க:

(i) $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \ldots\ldots$
(ii) $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} \ldots\ldots$
(iii) $\frac{1}{\sqrt{3}} + 1 + \sqrt{3} \ldots\ldots$

13. பெருக்குத் தொடரில் உள்ள 'n' எண்களின் பெருக்கற் பலன் P, கூடுதல் S, அவற்றின் தலைகீழ் பின்னங்களின் கூடுதல் S^1 என்றால் $P^2 = \left(\frac{S}{s^1}\right)^n$ என நிறுவுக.

15. a, b, c என்பவை பெருக்குத் தொடரானால் $\frac{a-b}{b-c} - \frac{a}{b}$ எனக் காட்டு

16. $\overline{1}_1, \overline{1}_2, \overline{1}_3, \ldots \overline{1}_n$ என்பவை பெருக்குத் தொடரானால் $\overline{1}_1 \cdot \overline{1}_n = \overline{1}_2 \cdot \overline{1}_{n-1} = \overline{1}_3 \cdot \overline{1}_{4-2} \ldots\ldots$ என நிறுவுக.

17. a, x, y, b என்பவை பெருக்குத் தொடரானல் $x^3 + y^3 = ab\,(a + b)$ எனக் காட்டு.

18. $a_1, a_2, a_3 \ldots$ என்பவை பெருக்குத் தொடரானல் $(a_1 + a_2)\,(a_2 + a_3) \ldots$ என்பவை பெருக்குத் தொடர் என நிருபி.

9·12 **இரண்டு எண்களிடையேயுள்ள கூட்டு; பெருக்கு, ஆர்மானிக் இடை எண்கள்:** 'x' 'y' என்ற இரு எண்களிடையே A, G, H என்பவை முறையே கூட்டிடை (A · M) பெருக்கிடை (S · M) ஆர்மானிக்கு இடை (H · M) ஆகுக.

$$\therefore\ A = \frac{x+y}{2};\quad G = \sqrt{xy}\quad \frac{2}{4} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$$

$$\therefore\ H = \frac{2xy}{x+y}$$

$$\therefore\ \frac{G}{A} = \frac{2\sqrt{xy}}{x+y} = \frac{H}{G} \qquad \therefore\ \frac{G}{A} = \frac{H}{S}$$

$\therefore$ A, G, H என்பவை பெருக்குத் தொடரில் உள்ளன (i)

$$A - G = \frac{a+b}{2} - \sqrt{ab}$$

$$= \frac{a + b - 2\sqrt{ab}}{2}$$

$$= \frac{(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2}{2} = \text{நேரெண்}$$

$$\therefore\ A > S \qquad \therefore\ H > S$$

ஆகையால் A, G, H இறங்கு வரிசையில் உள்ளன (ii)

"இரண்டு எண்களிடையேயுள்ள கூட்டிடை, பெருக்கிடை ஆர்மானிக்கு இடை எண்கள் இறங்கு வரிசைவில் பெருக்குத் தொடரில் அமையும்" எனத் தெளிவாகும்.

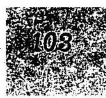
மாதிரி: இரண்டு எண்களிடையே, $A_1\ A_2$; $S_1\ S_2$; $H_1\ H_2$ என இரண்டிரண்டு கூட்டிடை, பெருக்கிடை, ஆர்மானிக்கு இடை கண்டால் $\dfrac{S_1\,S_2}{H_1\,H_2} = \dfrac{A_1 + A_2}{H_1 + H_2}$ ஆகும் என நிறுவு.

$x,\ A_1,\ A_2,\ y$ — கூட்டுத் தொடராகுக.

$$\therefore\ x + y = A_1 + A_2$$

$x,\ S_1,\ S_2,\ y$ — பெருக்குத் தொடரானல்

$$xy = G_1\,G_2$$



$x \quad H_1 \quad H_2 \quad y$ — ஆர்மானிக்குத் தொடரானல்

$\frac{1}{x} \quad \frac{1}{H_1} \quad \frac{1}{H_2} \quad \frac{1}{y}$ — கூட்டுத் தொடராகும்

$$\therefore \quad \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{H_1} + \frac{1}{H_2}$$

$$\therefore \quad \frac{H_1 + H_2}{H_1 H_2} = \frac{x+y}{xy} = \frac{A_1 + A_2}{G_1 G_2} \quad \therefore \quad \frac{S_1 S_2}{H_1 H_2} = \frac{A_1 + A_2}{H_1 + H_2}$$

பயிற்சி 35

1. ஒரு கூட்டுத் தொடர், ஆர்மானிக்குத் தொடர் இரண்டிலும் முதல் இரண்டு எண்கள் a, b; nவது உறுப்பு முறையே x, y என்ருல் $\frac{x-a}{y-a} = \frac{b}{y}$ எனக் காட்டு.

2. a, b, c என்ற எண்கள் பெருக்குத் தொடரிலுள்ளன. அத்துடன் $a^x = b^y = c^z$ என ஆனுல், x, y, z ஆர்மானிக்குத் தொடரிலுள்ளன எனக்காட்டு.

3. x, z என்ற இரு எண்களிடையே y என்பது கூட்டிடை, ny என்பது பெருக்கிடை என்ருல் ஆர்மானிக்கு இடை $n^2 y$ எனக் காட்டு.

4. a, b, c, d, e என்ற 5 எண்களில் a, b, c என்பவை கூட்டுத் தொடரிலும் b, c, d என்பவை பெருக்குத் தொடரிலும் c, d, e என்பவை ஆர்மானிக்குத் தொடரிலும் ஆனுல் a, c, e என்பவை பெருக்குத் தொடர் என நிரூபி.

5. a, b, c என்பவை கூட்டுத் தொடரிலும் a^2, b^2, c^2 என்பவை ஆர்மானிக்குத் தொடரிலும் ஆனுல் $-\frac{a}{2}, b, c$ என்பவை பெருக்குத் தொடரில் உள்ளன என நிரூபி அல்லது $a = b = c$ எனக் காட்டு.

6. b, a, c கூட்டுத் தொடரிலும், a, b, c பெருக்குத் தொடரிலுமானுல் a, c, b ஆர்மானிக்குத் தொடரில் எனக்காட்டு.

9·13. **முடிவிலாத் தொடர்:**

(எ-டு) $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots$ என முடிவின்றி எண்களைக் கொண்டால், அது முடிவிலாத் தொடர் எனப்படும். இங்கு $\frac{1}{2}, + \frac{1}{2^2}, + \frac{1}{2^3}$ என எண்கள் வருவதைக் காண

லாம். அவை மிகமிகக் குறுகுவதையும் காணலாம். அதாவது $\frac{1}{2^n}$ இன் மதிப்பு n இன் மதிப்பு அதிகமாக பூஜ்யத்தை நெருங்கு கிறது. இதை Lt. $\frac{1}{n + a\, 2^n} - 10$ எனக் குறிக்கப்படும். n அதிகமாக $\frac{1}{2n}$ ன் முடிவு மதிப்பு பூஜ்யம் எனப் பொருளாகும். (Limit of $\frac{1}{2n}$ as n tends to infinity is zero). பொதுவாக 'r' எனும் எண் அளவில் 1க் குறைவானல் r^n இன் மதிப்பு, n அதிகமாக அதிகமாக, பூஜ்யத்தை அணுகும். பூஜ்யம் எனவே கொள்ளலாம். $\underset{n \to a}{Lt.}\ r^n \to 0\ (r < 1)$ என்பது குறியீடாகும்.

முடிவிலாப் பெருக்குத் தொடரின் கூடுதல் : பெருக்குத் தொடர் $a + ar + ar^2 + \ldots$ ஆகுக. n உறுப்புக்களின் கூடுதலை S_n எனக் குறித்தால்

$$S_n = a + ar + ar^2 + \ldots \qquad + ar^{n-1}$$

$$\therefore\ S_n = \frac{a\,(1 - r^n)}{1 - r} = \frac{a}{1 - r} - \frac{ar^n}{1 - r}$$

ஆனல் $\underset{n \to a}{Lt.}\ r^n \to 0\ \ (r < 1)$

$$\therefore\ \underset{n \to a}{Lt.}\ S_n = \frac{a}{1 - r}$$

$\therefore$ முடிவிலாத் தொடர் $a + ar + ar^2 - \ldots$ இன் கூடுதல் $\frac{a}{(1 - r)}$ ஆகும்.

9·14. **கூட்டுப் பெருக்குத் தொடர்** (Arithmetico Geometric Science): $a + (a + d)\, r + (a + 2)\, r^2 + \ldots$ என்பது கூட்டுப் பெருக்குத் தொடர் எனப்படும்.

இதன் கூடுதல் காண :

$$S_n = a + (a + d)\, r + \ldots (a + \overline{n - 1}\, d)\, r^{n-1}$$

$$_rS_n = \qquad ar + \ldots (a + \overline{n - 2}d) r^{n-1} + (a + \overline{n - 1}d)^2 r$$

$\therefore\ S_n (1-r) = a+ar+dr+dr^2+\ldots(n-1)$ உறுப்புக்கள்) $-$
$(a+\overline{n-1}d)\, r^2$

$$= a + \frac{dr (1-r^{n-1})}{1-r} - (a+\overline{n-1}d)$$

$$\therefore\ S_n = \frac{a}{(1-r)} + \frac{dr}{(1-r)^2} - \frac{dr}{(1-r)^2} = \frac{a+\overline{b-1}a)r^3}{(1-r)}$$

இங்கு $Lt.\ r^n \to 0$ ஆவதால்

$$\underset{n \to a}{Lt.}\ S^n \quad \frac{a}{(1-r)} + \frac{dr}{(1-r)^2} \qquad (r < 1)$$

மாதிரி: $1 + \frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \ldots$ முடிவிலாமல் இந்தத் தொடரின் கூடுதல் காண முதல் எண் 1 ; பொது விகிதம் $\frac{2}{3}$

$$\therefore\ \text{கூடுதல்} = \frac{``a"}{1-r} = \frac{1}{1-\frac{2}{3}} = 3$$

மாதிரி: $\cdot 5\dot{1}\dot{3}$ என்ற மடங்குத் தசம பின்னத்தின் (Recurring decimal) மதிப்புக் காண்க.

$$\cdot 5\dot{1}\dot{3} = \cdot 5\,1\,3\,1\,3\,1\,3 \ldots$$

$$= \frac{5}{10} + \frac{13}{1000} + \frac{13}{100{,}000} + \ldots$$

$$= \frac{5}{10} + \frac{13}{10^3} + \frac{13}{10^5} + \frac{13}{10^7} - .$$

$$= \frac{5}{10} + \frac{13}{10^3} \cdot \left[\frac{1}{10^1} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^4} + \ldots\right]$$

$$= \frac{5}{10} + \frac{13}{10^3} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{10^2}}$$

$$= \frac{5}{10} + \frac{13}{1000} + \frac{100}{99}$$

$$= \frac{5}{10} + \frac{13}{990}$$

$$= \frac{495+13}{990} = \frac{508}{990} = \frac{254}{495}$$

மாதிரி: $3 + 5x + 7x^2 + 9x^3 + \ldots$ என்ற தொடரின் n உறுப்புக்களின் கூடுதலைக் காண்க: இதை முடிவிலாத் தொடர் எனக் கொண்டால், அதன் கூடுதல் என்ன?

$$S_n = 3+5x+7x^2+\cdot+(2n-1)\,x^{4-2}+(2n+1)x^{4-1}$$

$$\therefore\quad x\,S_n = 3x+5x^2 \ldots + (2n-1)\,x^{n-1}+(2n+1)\,x^{n+2}$$

$$\therefore\quad S_n\,(1-x) = 3+(2x+2x^2+\ \ldots\ +2x^{n-1})-(2^{n-1})\ x^n$$

$$= 3+2x\,\frac{[1-x^{n-1}]}{1-x}-(2n+1)\,x^n$$

$$\therefore\quad S_n = \frac{3}{(1-x)}+\frac{2x}{(1-x)^2}-\frac{2x^n}{(1-x)^2}-\frac{(2n+1)x^n}{(1-x)}$$

முடிவிலாத தொடராஞல்

கூடுதல் $= \dfrac{3}{1-x}+\dfrac{2x}{(1-x)^2}$

பயிற்சி 36

கூடுதல் காண்க.

1. (i) $10+5+2\,1/2\ +\ \ldots\ \infty$ (முடிவிலாமல்)

   (ii) $12+9+6\,1/4\ +\ \ldots\ \infty$,,

   (iii) $1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{2}\ +\ \ldots$,,

   (iv) $\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{9}+\dfrac{1}{27}\ +\ \ldots$

   (v) $1-\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\dfrac{1}{3}\ -\ \ldots$

2. சாதாரண பின்னங்களாக எழுதுக:

   (i) $\cdot\dot{2}$ (ii) $\cdot\dot{7}$ (iii) $\cdot\dot{9}$ (iv) $\cdot 2\dot{5}$ (v) $\cdot 1\dot{4}$

3. $1+2x+3x^2+4x^3\ +\ \ldots\ \infty$ கூடுதல் காண்க

4. $1+3x+5x^2+7x^3\ +\ \ldots$ இத்தொடரில் n உறுப்புக்களின் கூடுதலையும், முடிவிலாத் தொடரின் கூடுதலையும் காண்க.

5. $\dfrac{1}{3}+\dfrac{2}{3^2}+\dfrac{3}{3^3}+\dfrac{4}{3^4}\ \ldots\ \infty$ கூடுதல் காண்க.

6. $1-\dfrac{2}{5}+\dfrac{3}{5^2}-\dfrac{4}{5^3}\ \ldots\ \infty$,,

(v) சாதாரண முழு எண் தொடர்கள்

நாம் சாதாரணமாகப் பயன்படுத்தும் எண்கள் 1, 2, 3 .. முதலிய எண்கள். இந்த எண்கள் தொடர்புள்ள தொடர்கள் சிலவற்றைப் பார்ப்போம்.

ஒரு குறியீடு : $\sum n$ என்பது ஒரு குறியீடு.

இது $1 + 2 + 3 + \dots + n$ வரை உள்ள எண்களின் கூடுதலைக் குறிக்கிறது.

$\therefore \sum n = 1 + 2 + 3 + \dots + n$ இதேபோல

$$\sum n^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2$$

$$\sum n^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3$$

$\sum f(n)$ என்ருல் $f(n)$இல் nக்கு 1 முதல் nவரை எண்களைப் பிரதியிட வரும் எண் தொடரின் கூடுதலாகும்.

$\sum (2n-1)$ என்ருல் $1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1)$ என்ற பொருளாகும்.

9·15 **$\sum n$ இன் மதிப்புக்காண :** $\sum n = 1 + 2 + 3 + \dots + n$ இது கூட்டுத்தொடர் முதல் எண் 1. கடைசி எண் n பொது வித்தியாசம் 1. ஆகவே கூட்டுத் தொடர் கூடுதலைத் தரும் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தி $\sum n = \frac{n(n+1)}{2}$ என வருகிறது

அல்லது $\sum n = 1 + 2 + 3 + \dots + n.$

மாற்றி எழுத $\sum n = n + (n-1) + (n-2) + 1.$

$\therefore \quad 2\sum n = (n+1) + (n+1) + (n+1)$ என n உறுப்புக்கள்

$$= n(n+1)$$

$$\therefore \quad \sum n = \frac{n(n+1)}{2}$$

9·16 **$\sum n^2$ இன் மதிப்பு :** [சாதாரண எண்களில் முதல் n எண்களின் வர்க்கங்களின் கூடுதல்]

$n^3 - (n-1)^3 \equiv 3n^2 - 3n + 1$ என்பது முற்ருெருமை. இதில் nக்கு 1 முதல், nவரை பிரதியிடக்கிடைப்பது

$$1^3 - 0 = 3 \cdot 1^2 - 3 \cdot 1 + 1$$
$$2^3 - 1^3 = 3 \cdot 2^2 - 3 \cdot 2 + 1$$
$$3^3 - 2^3 = 3 \cdot 3^2 - 3 \cdot 3 + 1$$

$n^3 - (n-1)^3 = 3 \cdot n^2 - 3 \cdot n + 1$ என n வரிசை இவற்றைக் கூட்ட வருவது

$$n^3 = 3 \sum n^2 - 3 \sum n + n$$
$$\therefore \quad 3 \sum n^2 = n^3 + 3 \sum n - n$$
$$= n^3 + \frac{3\,n\,(n+1)}{2} - n$$
$$\therefore \quad 6 \sum n^2 = 2\,n^3 + 3\,n\,(n+1) - 2n$$
$$= n\,\{2n^2 + 3n + 1\}$$
$$= n\,(n+1)\,(2n+1)$$
$$\therefore \quad \sum n^2 = \frac{n\,(n+1)\,(2n+1)}{6}$$

9·17 $\sum n^3$இன் மதிப்பு: (முதல் n சாதாரண எண்களின் கனங்களின் கூடுதல்) $(n+1)^2 - (n-1)^2 \equiv 4\,n$ என அறிவோம்

$\therefore \quad (n+1)^2\,n^2 - n^2\,(n-1)^2 \equiv 4 \cdot n^3$ எனும் முற்றொருமை வருகிறது. இதில் nக்கு 1 முதல் nவரை பிரதியிட கீழ்வரும் n வரிசைகள் வருகின்றன.

$$2^2 \cdot 1^2 - 1^2 \cdot 0^2 = 4 \cdot 1^3$$
$$3^2 \cdot 2^2 - 2^2 \cdot 1^2 = 4 \cdot 2^3$$
$$4^2 \cdot 3^2 - 3^2 \cdot 2^2 = 4 \cdot 3^3$$

$(n+1)^2\,n^2 - n^2\,(n-1)^2 = 4\,n^3$ இவைகளைக் கூட்ட

$$(n+1)^2 n^2 = 4 \sum n^3$$
$$\therefore \quad \sum n^3 = \frac{n^2\,(n+1)^2}{4}$$

சூத்திரங்களை மறுபடியும் கூற: $\sum n = \frac{n\,(n+1)}{2}$

$$\sum n^2 = \frac{n\,(n+1)\,(2n+1)}{6}$$
$$\sum n^3 = \frac{n^2\,(n+1)^2}{4}$$

[குறிப்பு: $\sum n^3 = (\sum n)^2$ என்பதைக் கவனிக்கவும்].

மாதிரி: கீழ் வரும் தொடரில் 'n' கூடுதல் காண்க:

$$3 \cdot 5 \cdot 9 + 5 \cdot 7 \cdot 11 + 7 \cdot 9 \cdot 13 + \ldots\ldots$$

முதல் காரணிகள், $3, 5, 7, \ldots$ (கூட்டுத் தொடர்)

இரண்டாவது காரணிகள் $5, 7, 9, \ldots$,, ,,

மூன்றுவது காரணிகள் $9, 11, 13, \ldots$,, ,,

$\therefore$ n வது உறுப்பில் உள்ள காரணிகள் $(2n+1)(2n+3)(2n+7)$

n வது உறுப்பை Tn என்போம்,

$$Tn = (2n+1)(2n+3)(2n+7).$$
$$= (4n^2+8n+3)(2n+7)$$
$$Tn = 8n^3 + 44n^2 + 62n + 21$$

n க்கு 1 முதல் n வரை பிரதியிட்டுக் கூட்டவரும்

கூடுதல் $Sn = 8\sum n^3 + 44\sum n^2 + 62\sum n + 21n$

$$= \frac{8n^2(n+1)^2}{4} + \frac{44n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{62n(n+1)}{2} + 21n$$

$$\therefore \quad Sn = 2n^2(n+1)^2 + \frac{22n(n+1)(2n+1)}{3} + 31n(n+1) + 21n$$

[$n=1$ எனப் பிரதியிட $S_1 = 8 + 44 + 62 + 21$

$= 135$ முதல் உறுப்பு.

இவ்வாறு சரிபார்க்கலாம்].

மாதிரி: சாதாரண எண்களில் அடுத்தடுத்துள்ள 'n' எண்களின் கனங்களின் கூடுதல் அவற்றின் கூடுதலால் வகுபடும் என நிறுவுக:

எண்கள் $(P+1), (P+2) \ldots \quad (P+n)$ ஆகுக

இவற்றின் கூடுதல் $= \sum(P+n) - \sum P$

இவற்றின் கனங்களின் கூடுதல் $= \sum(P+n)^3 - \sum P^3$

$$= [\sum(P+n)]^2 - [\sum P]^2$$

$$\therefore \quad \frac{\text{கனங்களின் கூடுதல்}}{\text{எண்களின் கூடுதல்}} = \frac{[\sum(P+n)]^2 - [\sum P]^2}{[\sum P+n) + \sum(P)]}$$

$$= [\sum(P+n) + \sum(P)]$$

ஆகவே கனங்களின் கூடுதல், எண்களின் கூடுதலால் வகுபடும் எனத் தெரிகிறது.

[குறிப்பு: (i) முதல் $(P+n)$ எண்களின் கூடுதலிலிருந்து முதல் P எண்களின் கூடுதலைக் கழிக்க $(P+1)$ முதல் அடுத்து வரும் 'n' எண்களின் கூடுதல் வருகிறது.

(ii) $\sum n^3 = (\sum n)^2$ எனும் சூத்திரம் பயன் படுத்தப்பட்டுள்ளது].

9·18. பலவகைக் கணக்குகள் :

மாதிரி : ஒரு தொடரில் n வது உறுப்பு $4^n + 2n(n-1)$ என்றால் அந்தத் தொடரில் 'n' எண்களின் கூடுதல் என்ன ?

$$Tn = 4^n + 2n(n-1)$$

$$= 4^n + 2n^2 - 2n$$

$$\therefore \quad Sn = \sum 4^n + 2\sum n^2 - 2\sum n$$

$\sum 4^n$ என்பது S.P. முதல் எண் 4 ; பொது வீதம் 4

$$\therefore \quad \sum 4^n = 4\ \frac{4^n - 1}{4 - 1} = \frac{4}{3}\ (4^n - 1)$$

$$\therefore \quad Sn = \frac{4}{3}(4^n - 1) + \frac{2n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{2n(n+1)}{2}$$

$$= \frac{4^{n+1}}{3} - \frac{4}{3} + \frac{n(n+1)(2n+1)}{3} - n(n+1)$$

பயிற்சி 37

கீழ் வரும் தொடர்களில் முதல் 'n' உறுப்புக்களின் கூடுதல் காணவும்.

1. $1 \cdot 5 + 3 \cdot 7 + 5 \cdot 9 + 7 \cdot 11 + \ldots$
2. $1^2 + 3^2 + 5^2 + 7^2 + \ldots$
3. $1^2 + 5^2 + 9^2 + 13^2 + \ldots$
4. $3 \cdot 7 + 5 \cdot 9 + 7 \cdot 11 + \ldots$
5. $3 \cdot 5 \cdot 7 + 5 \cdot 7 \cdot 9 + 7 \cdot 9 \cdot 11 + \ldots$
6. $1 \cdot 3 \cdot 4 + 2 \cdot 4 \cdot 5 + 3 . 5 . 6 + \ldots$
7. $1 \cdot 3^2 + 2 \cdot 5^2 + 3 \cdot 7^2 + \ldots$ (M.U.)
8. $1 \cdot 2^2 + 2 \cdot 3^2 + 3 \cdot 4^2 + \ldots$ (M.U.)
9. $1^2 \cdot 3 + 3^2 \cdot 5 + 5^2 \cdot 7 + \ldots$ (M.U.)

கீழ்க்கண்ட கணக்குகளில் தொடரின் n வது உறுப்பு தரப்பட்டுள்ளது. முதல் 'n' உறுப்புக்களின் கூடுதல் காணவும்.

10. $3n^2 - n$ 11. $n^3 + \frac{3}{2}n$ 12. $n(n+2)$

13. $n^2(2n+3)$ 14. $3(4^n + 2n^2) - 4n^3$

15. $4^n + 2n(n-1)$.

10. பலவகைச் சமன்பாடுகள்

Miscellaneous Equations

10·1 வகை 1.: இருபடிச் சமன்பாடு வழித் தீர்வுகாணும் சமன்பாடுகள் :

மாதிரி :

தீர்வு காண்க. $2\sqrt{\frac{x}{a}} + 3\sqrt{\frac{a}{x}} = \frac{b}{a} + \frac{6a}{b}$

$\sqrt{\frac{x}{a}} = y$ என இடுக

$\therefore \sqrt{\frac{a}{x}} = \frac{1}{y}$

$\therefore 2y + \frac{3}{y} = \frac{b}{a} + \frac{6a}{b}$

$\therefore 2ab\,y^2 - 6a^2 y - b^2 y + 3ab = 0$

$\therefore (2ay - b)(by - 3a) = 0$

$\therefore y = \frac{b}{2a}$ அல்லது $\frac{3a}{b}$

ஆனல் $x = ay^2 = \frac{b^2}{4a}$ அல்லது $\frac{9a^2}{b^2}$

$\therefore x = \frac{b^2}{4a};\ \frac{9a^3}{b^2}$

$y = \frac{b}{a^2};\ \frac{3a}{b}$

மாதிரி : $2^{2x+8} + 1 = 32 \cdot 2^x$ என்றால் xஇன் மதிப்பு என்ன?

சமன்பாடு $2^8 \cdot 2^{2x} + 1 = 32 \cdot 2^x$ $\quad 2^x = y$ என இடுக.

$\therefore \quad 256\, y^2 + 1 = 32\, y$

$\therefore \quad 256\, y^2 - 32y + 1 = 0$

$(16\, y - 1)^2 = 0 \qquad \therefore \quad y = \frac{1}{16}, \ \frac{1}{16}$

$\therefore \quad 2^x = \frac{1}{16} = 2^{-4}$

$\therefore \quad x = -4$

10·2 **வகை 2.** $(x + a)(x + b)(x + c)(x + d) = a$ a, b, c, d என்ற எண்களில் ஏதேனும் இரண்டு எண்களின் கூடுதல் = மற்றிரு எண்களின் கூடுதல்.

$a + b = c + d = k$ ஆகுக.

$\therefore \quad (x^2 + \overline{a + b}\, x + ab)(x^2 + \overline{c + d}\, x + cd) = a$

$\therefore \quad (x^2 + kx + ab) \quad (x^2 + kx + cd) \quad = a$

$x^2 + kx = y$ எனப் பிரதியிட இருபடிச் சமன்பாட்டுக்கு ஒடுங்குகிறது.

10·3 **வகை 3.** $(ax^2 + bx + c) + p\sqrt{ax^2 + bx + c^1} = q.$ $ax^2 + bx + c^1) = y^2$ எனப் பிரதியிடுக.

$\therefore \quad ax^2 + bx + c = ax^2 + bx + c^1 + c - c)$

$= y^2 + (e - c^1)$

இப்போது சமன்பாடு இருபடிச் சமன்பாடாகிறது.

மாதிரி: $x^2 - 5x + 2\sqrt{x^2 - 5x + 3} = 12$; தீர்வுகாண்

$x^2 - 5x + 3 = y^2$ ஆகுக.

$\therefore \quad x^2 - 5x = y^2 - 3$

$\therefore \quad y^2 - 3 + 2y = 12$

$y = 3$ அல்லது -5

$\sqrt{x^2 - 5x + 3} = 3$ அல்லது $\sqrt{x^2 - 5x + 3} = -5$

$x^2 - 5x + 3 = 9$ அல்லது $x^2 - 5x + 9 = 25.$

இதன் மூலங்கள் $6, -1, \frac{5 \pm \sqrt{113}}{2}$ ஆகும்.

இதில் $(6, -1)$ எனும் மூலங்கள் மட்டுமே சமன்பாட்டுக்கிணங்கியது.



[குறிப்பு: $\frac{5 \pm \sqrt{113}}{2}$ என்ற மூலங்கள் -5இலிருந்து வருவதால் $x^2 - 5x - 2\sqrt{x^2-5x+3} = 0$ என்ற சமன்பாட்டுக்கு இணங்கும். ஆகவே, yஇன் நேரெண்மதிப்பை மட்டும் கொண்டு, xஇன் மதிப்புக்களைக் காணவும்].

10·4 **வகை 4:** $\sqrt{ax^2+bx+c} + \sqrt{ax^2+bx+c^1} = k$ **(1)**

இதன் தீர்வு காண:

$(ax^2 + bx + c) - (ax^2 + bx + c^1) = c - c^1$ **(2)**

$(2) \div (1)$ $\sqrt{ax^2+b+c} - \sqrt{ax^2+bx+c^1} = \frac{e - c^1}{k}$ **(3)**

(1), (3)லிருந்து தீர்வு காண முடியும்.

மாதிரி: $\sqrt{3x^2-4x+34} + \sqrt{3x^2-4x-11} = 9$

ஆனால் $(3x^2-4x+34) - (3x^2-4x-11) = 45$

$\therefore \sqrt{3x^2-4x+34} - \sqrt{3x^2-4x-11} = 5$

$\therefore \sqrt{3x^2-4x+34} = 7;\ \sqrt{3x^2-4x-11} = 2$

$\therefore 3x^2 - 4x - 15 = 0;$

$\therefore (3x + 5)(x - 3) = 0$

$\therefore x = 3$ அல்லது $-\frac{5}{3}$

10·5 **மாதிரி:** $\frac{\sqrt{x+3} - \sqrt{x-3}}{\sqrt{x+3} + \sqrt{x-3}} = \frac{1}{3}$

$$\frac{(\sqrt{x+3} + \sqrt{x-3}) + (\sqrt{x+3} - \sqrt{x-3})}{(\sqrt{x+3} + \sqrt{x-3}) - (\sqrt{x+3} + \sqrt{x-3})} = \frac{3+1}{3-1}$$

$$\therefore \frac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{x-3}} = 2$$

$$\therefore \frac{x+3}{x-3} = 4$$

$$x + 3 = 4x - 12$$

$$3x = 15$$

$$\therefore x = 5$$

பயிற்சி 38

தீர்வு காண்க:

1. $9 + x^{-4} = 10x^{-2}$
2. $2\sqrt{x} + \frac{2}{\sqrt{x}} = 5$
3. $5\sqrt{\frac{3}{x}} + 7\sqrt{\frac{x}{3}}$
4. $\sqrt{\frac{x}{1-x}} + \sqrt{\frac{1-x}{x}} = 2\frac{1}{6}$
5. $3^{2x} + 9 = 10 \cdot 3^{x}$
6. $2^{2x+3} - 57 = 65\,(2^{x} - 1)$
7. $\sqrt{2^{x}} + \frac{1}{\sqrt{2^{x}}} = 2.$
8. $\frac{3}{\sqrt{2x}} - \frac{\sqrt{2x}}{5} = \frac{59}{10}$
9. $(x + 9)(x - 3)(x - 7)(x + 5) = 385$
10. $x(2x + 1)(x - 2)(2x - 3) = 63$
11. $(2x - 7)(x^2 - 9)(2x + 5) = 91$
12. $3x^2 - 4x + \sqrt{3x^2 - 4x - 6} = 18$
13. $3x^2 - 7 + 3\sqrt{3x^2 - 16x + 21} = 16x$
14. $8 + 9\sqrt{(3x - 1)(x - 2)} = 3x^2 - 7x$
15. $\sqrt{2x^2 + 5x - 2} - \sqrt{2x^2 + 5x - 9} = 1$
16. $\sqrt{2x^2 - 7x + 1} - \sqrt{2x^2 - 9x + 4} = 1$
17. $\sqrt{3x^2 - 2x + 9} + \sqrt{3x^2 - 2x - 4} = 13$
18. $\frac{\sqrt{x+5} + \sqrt{x-16}}{\sqrt{x+5} - \sqrt{x-16}} = \frac{7}{3}$
19. $\frac{\sqrt{2+x} + \sqrt{2-x}}{\sqrt{2+x} - \sqrt{2-x}} = 2.$
20. $\frac{\sqrt{7x+2} + \sqrt{4x+1}}{\sqrt{7x+2} - \sqrt{4x+1}} = 7.$

ஒருங்கமைச் சமன்பாடுகள்

10·6. **வகை 1:** 'x', 'y' எனும் இருமாறிகளில் ஒரு சமன்பாடு இருபடியாகவும், இன்னொன்று ஒருபடிச் சமன்பாடாகவும் அமைவது.

மாதிரி: $3x - 2y = 7$; $xy = 20$

$$\therefore\ y = \frac{20}{x}.$$

$$\therefore \quad 3x - \frac{40}{x} = 7 \quad \therefore \quad 3x^2 - 7x - 40 = 0$$

$$\therefore \quad (x - 5)(3x + 8) = 0$$

$$\therefore \quad x = 5 \text{ அல்லது } -\frac{8}{3}$$

$$\therefore \quad y = 4 \text{ அல்லது } -\frac{20}{8} \times 3 = -\frac{60}{8} = -\frac{15}{2}$$

10·7. வகை 2: 'x' 'y' உறுப்புக்கள், ஓரினக்கோவையாக வரும் சமன்பாடுகள்.

மாதிரி: $5y^2 - 7x^2 = 17$

$5xy - 6x^2 = 6$ தீர்வு காண்க.

$y = m\,x$ எனப் பிரதியிடுக.

$$\therefore \quad x^2 [5m^2 - 7] = 17$$

$$x^2 [5m - 6] = 6$$

$$\therefore \quad 6 [5m^2 - 7] = 17 [5m - 6] = 85m = 102$$

$$30m^2 - 42$$

$$\therefore \quad 30m^2 - 85m + 60 = 0$$

$$6m^2 - 17m + 12 = 0$$

$$\therefore \quad (3m - 4)(2m - 3) = 0$$

$$\therefore \quad m = \frac{4}{3} \text{ அல்லது } \frac{3}{4}$$

ஆனால் $x^2 [5m - 6] = 6$

$$\therefore \quad x^2 \left[\frac{20}{3} - 6\right] = 6 \quad \left(m = \frac{4}{3} \text{ என இட}\right)$$

$$2x^2 = 18$$

$$x^2 = 9$$

$$x = \pm 3$$

$$\therefore \quad y = \frac{4}{3} \times 3 \,;\; \frac{4}{3} \times (-3)$$

$$y = 4 \text{ or } -4$$

$$\text{அல்லது } x^2 \left[\frac{15}{2} - 6\right] = 6 \quad \left[m - \frac{3}{2} \text{ என இட}\right]$$

$$3x^2 = 12$$
$$x^2 = 4$$
$$x = \pm 2$$
$$\therefore\ y = \frac{3}{2}x \pm 12 = \pm 3$$

$\therefore\ x = \pm 3$ $\quad x = \pm 2$

$y = \pm 4$ $\quad y = \pm 3$

10·8 **பொதுமுறை:** இதுவரை கூறிய வகைகளில் உட்படாத சமன்பாடுகளைப் பலவித உத்திகளால் தீர்வு காணவும்.

மாதிரி: தீர்வு காண்:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{7}{12} \qquad \frac{1}{y^2} + \frac{1}{x^2} = \frac{25}{144}$$

$\frac{1}{x} = a;\ \frac{1}{y} = b$ என இடுக.

$$\therefore\ a + b = \frac{7}{12} \qquad a^2 + b^2 = \frac{25}{144}$$

$$\therefore\ a^2 + b^2 + 2ab = \frac{49}{144} \quad \therefore\ 2ab = \frac{24}{144} = \frac{1}{6}$$

$$\therefore\ ab = \frac{1}{12}$$

$\therefore\ a = \frac{1}{4},\ b = \frac{1}{3}$ (பார்வையில் அறிகிறோம்)

$\therefore\ x = 4 \quad y = 3$

சமச் சீரானதால் $x = 3 \quad y = 4$ என்பதும் தீர்வு ஆகும்.

பயிற்சி 39

தீர்வு காண்க:

1. $5x - y = 3$
   $y^2 - 6x^2 = 25$
2. $4x - 3y = 1$
   $12xy + 13y^2 = 25$
3. $3x^2 - 5y^2 = 7$
   $3xy - 4y^2 = 2$
4. $5y^2 - 7x^2 = 17$
5. $3x^2 + xy + y^2 = 15$
   $31xy - 3x^2 - 5y^2 = 45$
6. $x^2 + y^2 - 3 = 3xy$
   $2x^2 - 6 + y^2 = 0$
7. $x + \frac{4}{y} = 1;\ y + \frac{4}{x} = 25$
8. $\frac{x}{2} + \frac{y}{5} = 5$
   $\frac{2}{x} + \frac{5}{y} = \frac{5}{6}$

9. $x^2+y^2+x+y=18$
$xy=6$

10. $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=5$
$6xy=5$

11. $x^2+y^2=7$; $x^2-xy+y^2=91$

12. $x^2+y^2-14x+4y+28=0$; $x-7y+4=0$ (M.U.)

13. $3x+y=1$; $2x^2-3xy-y^2=4$ (M.U.)

14. $6x-y=1$; $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=6$ (M.U.)

15. $x^2+xy=4$; $y^2+xy=5$ (M.U.)

16. $(7x-3y)^2-(7x-3y)+10=0$; $(2x-y-1)=0$
($7x-3y=a$ எனப் பிரதியிட்டுச் செய்க) (M.U.)

17. $2(x^2+y^2)=5(x+y)$ $xy=3$ (M.U.)

18. $x^2+y^2=2y+7$ $xy=x+4$ (M.U.)

19. $x^3+y^3=91$; $x^2-xy+y^2=13$ (M.U.)

20. $xy=x+4$; $x^2+y^2=2y+7$ (M.U.)

21. $x^3+y^3=35$ $x+y=5$ (M.U.)

22. $x^2+y^2+x+y=18$ $xy=6$ (M.U.)

23. $3x^2+2xy+3=0$ $5x^2-3xy-14=0$ (M.U.)

24. $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\cdot 5$ $6xy=1$ (M.U.)

25. $x+\frac{3}{y}=2$ $y+\frac{3}{x}=-2$ (M.U.)

II. ஜியோமிதி
(Geometry)

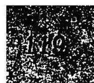
1. விகிதமும் விகிதசமமும்

1·1 **விகிதம் :** பொருள்களின் பண்புகளை ஒப்பிட வேண்டுமெனில், பண்புகள் ஒரே வகையானதாக இருக்க வேண்டும். எடுத்துக் காட்டாக, நீளத்தை நீளத்துடன் ஒப்பிடலாம். நீளத்தைப் பரப்புடன் ஒப்பிடலாமா? இவ்வாறு நீளங்கள், பரப்புக்கள் கனபரிமாணங்கள் இவைகளை அவையவைகளின் வகைகளுடன் ஒப்பிட முடியும்.

அத்தகைய பண்புகளை அளக்கும் அளவையின் அலகுகளும் ஒன்ருக இருக்க வேண்டும். இரு பையன்களின் உயரங்களை ஒப்பிட, அவைகளை அங்குலங்களிலோ அல்லது சென்டிமீட்டரிலோ அளக்கலாம். ஒரு பையனின் உயரத்தை அங்குலங்களிலும், மற்றவனின் உயரத்தை சென்டிமீடர்களிலோ அளந்து ஒப்பிடுவது பொருத்தமாகாது. இரு உயரங்களும் ஒரே அளவையில் இருக்க வேண்டும்.

இவ்வாறு ஒப்பிட்டு உரைக்கும் அளவு 'விகிதம்' எனப்படும். அளவுகள் (ஒரே அலகில்) a, b என இருப்பின் ஒப்பிடும் அளவு $\frac{a}{b}$ என்ற பின்னத்தால் குறிக்கப்படும். இது $a \div b$ ஆனதால் $a : b$ எனவும் எழுதப்படும்.

உதாரணமாக A என்ற பையனின் உயரம் 1 மீ. 65 செ. மீ; B என்ற பையனின் உயரம் 1 மீ. 68 செ. மீ. எனில் Aயின் உயரம் : Bயின் உயரம் $= 165 : 168$ ஆகும்.



பயிற்சி 1

கீழ்க்கண்ட அளவுகளின் விகிதங்களை எழுது.

(1) 3 கெ. 5 அங்.; 7 அடி 8 அங்.

(2) 4 மீ. 14 செ.மீ.; 2 மீ. 8 மி. மீ.

(3) 2 ச. கெ.; 3 ச. அடி 6 ச. அங்.

(4) 7 டாலர்; 21 ரூ. [100 டாலர் = ரூ. 750].

1·2 **விகித சமம்:** a, b, c, d என்பவை நான்கு எண்கள் ஆகுக. அவைகளில் $a : b = c : d$ என இருந்தால் a, b, c, d என்பவை, 'விகிதசமப் பொருத்தத்தில் இருக்கும் எண்கள்' எனப்படும்.

சில முக்கிய உண்மைகள்: a, b, c, d என்பவை விகிதசமப் பொருத்தத்தில் இருந்தால், அதாவது $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ என இருப்பின்,

(i) $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$.

(ii) $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$.

(iii) $\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d} \quad \left(\because \frac{a}{b} + 1 = \frac{c}{d} + 1 \right)$

(iv) $\frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d} \quad \left(\because \frac{a}{b} - 1 = \frac{c}{d} - 1 \right)$.

(v) $\frac{b-a}{b} = \frac{d-c}{d}$.

(vi) $\frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}$ அல்லது $\frac{a-b}{a+b} = \frac{c-d}{c+d}$.

என்ற முடிவுகள் புலனாகின்றன.

தேற்றம் 1. ஒரு நேர்கோட்டுத் துண்டை உள்ளாகவோ, புறம்பாகவோ ஒரு குறிப்பிட்ட விகிதத்தில் ஒரு புள்ளிக்குமேல் பிரிக்க இயலாது.



கொள்கை: AB என்பது ஒரு நேர்கோட்டுத் துண்டு. AB யினுள் P என்ற புள்ளி, AB யை AP, PB என்ற இரு துண்டுகளாகப் பிரிக்கிறது. அவைகளின் விகிதம் $\frac{AP}{PB}$.

நிரூபிக்க : ABயினுள் வேறு புள்ளி இதே $\frac{AP}{PB}$ என்ற விகிதத்தில் ABயைப் பிரிக்க முடியாது.

நிரூபணம் : அவ்வாறு ஒரு புள்ளி இருப்பின் அது P_1 ஆகுக

$$\therefore \quad \frac{AP_1}{P_1B} = \frac{AP}{PB}.$$

இரு பக்கத்துடன் 1ஐக் கூட்ட $\frac{AP_1}{P_1B} + 1 = \frac{AP}{PB} + 1$

$$\therefore \quad \frac{AP_1 + P_1B}{P_1B} = \frac{AP + PB}{PB}.$$

$$\therefore \quad \frac{AB}{P_1B} = \frac{AB}{PB}.$$

$$\therefore \quad P_1B = PB.$$

ஆகவே P_1 என்ற புள்ளியும் P என்ற புள்ளியும் ஒன்றேதான். வேறு அல்ல.

இவ்வாறே P என்ற புள்ளி ABக்குப் புறம்பாக அமைந்தால், மற்ருெரு புள்ளியான P_1 ஆனது $\frac{AP}{PB} = \frac{AP_1}{P_1B}$ என அமையாது என்று நிரூபிக்கலாம்.

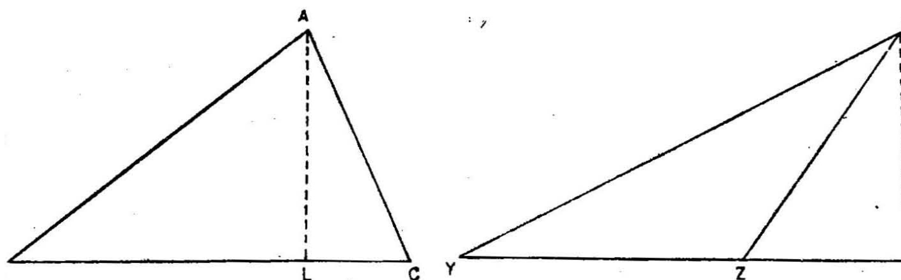
குறிப்பு : ஒரு திசையில் கோட்டுத்துண்டின் அளவை நேரெண்ணுல் குறித்தால், எதிர்த்திசையில் அளவை எதிரெண்ணுல் குறிக்கவேண்டும். P எனும் புள்ளி ABக்கு இடையே இருந்தால் AP, PB இரண்டும் ஒரே திசையை உடையவை. $\therefore$ AP : PB நேரெண் விகிதமாகும்.

ABக்கு வெளியே Q எனும் புள்ளியைக் கொண்டால் AQ, QB எனும் கோட்டுத் துண்டுகள் ஒன்றற்கொன்று எதிர் திசையாகும். ஆகவே ஒன்றன் அளவு நேரெண்ணுல் மற்றதன் அளவு எதிரெண்ணுகும். $\therefore$ AQ : QB என்ற விகிதம் எதிரெண்ணுகும். இதிலிருுந்து நாம் அறிவது விகிதம் நேரெண்ணுகவோ, எதிரெண்ணுகவோ இருக்கலாம்; நேரெண்ணுல் AB எனும் துண்டை புள்ளி உள்ளீடாகப் பிரிக்கும், எதிரெண்ணுல் வெளியில் அமையும். ஆகவே தேற்றத்தை இவ்வாறு கூறலாம். ''ஒரு நேர் கோட்டுத் துண்டை ஒரு குறிப்பிட்ட விகிதத்தில் ஒரு புள்ளிக்குமேல் பிரிக்க இயலாது.''

[விகிதம் நேரெண்ணுகவோ எதிரெண்ணுகவோ இருக்கலாம்]



தேற்றம் 2. இரண்டு முக்கோணங்களின் குத்துயரங்கள் சமமானால் அவைகளின் பரப்புக்களின் விகிதம், அடிப்பக்கங்களின் விகிதத்திற்குச் சமமாகும்.



கொள்கை : ABC, XYZ என்ற முக்கோணங்களில் $AL \perp BC$; $XM \perp YZ$; $AL = XM$.

நிரூபிக்க : $\dfrac{\triangle ABC}{\triangle XYZ} = \dfrac{BC}{YZ}$.

நிரூபணம் : $\triangle ABC = \frac{1}{2}\ BC \cdot AL$

$\triangle XYZ = \frac{1}{2}\ YZ \cdot XM$.

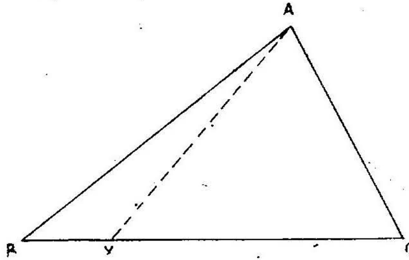
$$\therefore \frac{\triangle ABC}{\triangle XYZ} = \frac{\frac{1}{2}\ BC \cdot AL}{\frac{1}{2}\ YZ \cdot XM}.$$

$$= \frac{BC}{YZ} \quad (\because \ AL = XM)$$

குறிப்பு: (1) $\triangle ABC$ எனில் $\triangle ABC$யின் பரப்பு எனப் பொருளாகும்.

(2) இரண்டு இணைகரங்களின் உயரங்கள் சமமானால் அவைகளின் பரப்புக்களும், பக்கங்களும் விகித சமப் பொருத்தத்தில் இருக்கும்.

3. $\triangle$ ABC யில், BC யின் மீது X ஒரு புள்ளியானால் $\dfrac{\triangle ABX}{\triangle XAC} = \dfrac{BX}{XC}$ ஆகும். ஏனெனில் இரு முக்கோணங்களுக்கும் A என்ற முனை பொது. ஆகவே எதிர்ப் பக்கங்களாகிய BX, XCக்கு வரையப்படும் குத்துயரங்கள் சமம்.



பயிற்சி 2

1. A B C ஒரு முக்கோணம். O என்பது ஒரு புள்ளி A O ஆனது BCயை Dயில் வெட்டுகிறது. $\frac{BD}{DC} = \frac{\triangle AOB}{\triangle AOC}$ என்று காட்டு.

2. மேலே கூறிய கணக்கில் BO, CO என்பவை CA, ABயை முறையே E, Fல் சந்தித்தால் $\frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{AF}{EB} = 1$ என நிரூபி.

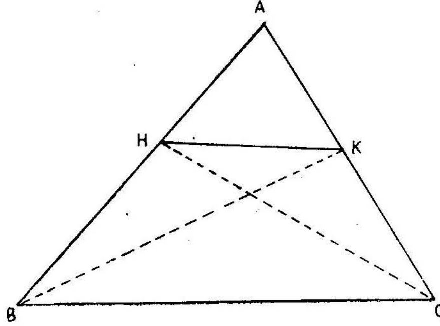
3. முதற் கணக்கில் $\frac{OD}{AD} = \frac{\triangle BOC}{\triangle ABC}$ எனவும், $\frac{OD}{AD} + \frac{OE}{BE} + \frac{OF}{CF} = 1$ எனவும் நிரூபி

4. ஒரு முக்கோணத்தின் இடைக் கோடுகள் (Medians) முக்கோணத்தைச் சம பரப்புள்ள 6 முக்கோணங்களாகப் பிரிக்கின்றன எனக் காட்டு. (முக்கோணத்தின் இடைக் கோடுகள் ஒரு புள்ளியில் சந்திக்கும் என்று கொள்க)

5. A B C D என்ற நாற்கரத்தின் மூலை விட்டங்கள் Eயில் சந்திக்கின்றன ABE, BEC, AED, CED என்ற முக்கோணங்களின் பரப்புக்கள் விகித சமத்தில் இருக்கும் என நிரூபி.

தேற்றம் 3. ஒரு முக்கோணத்தின் ஒரு பக்கத்திற்கு இணையாக வரையப்படும் நேர்கோடு, முக்கோணத்தின் மற்ற இரு பக்கங்களையும் சம விகிதத்தில் பிரிக்கும்.





கொள்கை : ABC என்ற முக்கோணத்தில் HK ∥ BC. HK ஆனது ABயை Hஇலும், ACஐ Kஇலும் வெட்டுகிறது.

நிரூபிக்க : $\frac{AH}{HB} = \frac{AK}{KC}$

வரைதல் : HC, BKயைச் சேர்.

நிரூபணம் : △ AKH, △ HKBகளில் K என்பது பொது முனை.

$$\therefore \frac{\triangle AHK}{\triangle BHK} = \frac{AH}{HB}$$

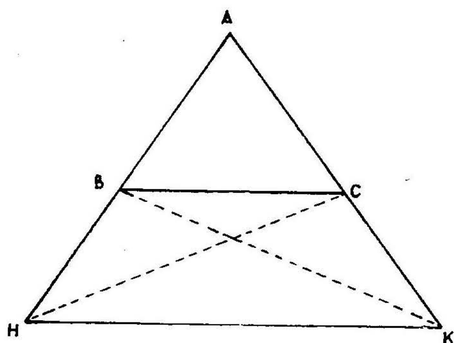
இதேபோல் $\frac{\triangle AHK}{\triangle CHK} = \frac{AK}{KC}$

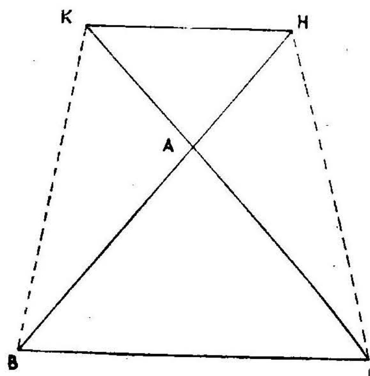
BHK, CHK என்ற முக்கோணங்கள் HK என்ற ஒரே அடிப் பக்கத்தின் மீதும் HK, BC என்ற இணைகோடுகளில் அடங்கி யிருப்பதால் △ BHK = △ BHK = CHK.

$$\therefore \frac{\triangle AHK}{\triangle BHK} = \frac{\triangle AHK}{\triangle CHK}$$

$$\therefore \frac{AH}{HB} = \frac{AK}{KC}$$

குறிப்பு : (1) BCக்கு வரையப்படும் இணைகோடான HK என்பது AB, ACயைப் படத்தில் காட்டியுள்ளபடி புறம்பாகவும் வெட்டலாம்.

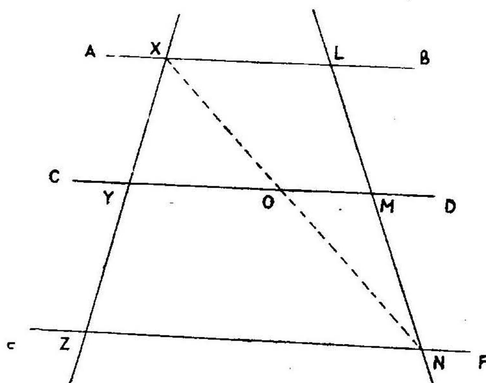




அப்போதும் அதே நிரூபணம் பொருந்தும்.

(2) $\frac{AH}{HB} = \frac{AK}{KC}$ என்பதால் $\frac{AH}{AB} = \frac{AK}{AC}$ எனவும், $\frac{AB}{HB} = \frac{AC}{HK}$ எனவும் வருகிறது. ஏனெனில் $\frac{AH}{AH + HB} = \frac{AK}{AK + KC}$; $\frac{AH + HB}{HB} = \frac{AK + KC}{KC}$

(3) மூன்று இணைகோடுகள், குறுக்கு வெட்டிகளை ஒரே விகிதத்திலுள்ள இரண்டு துண்டுகளாகப் பிரிக்கும்.



AB, CD, EF என்பவை இணைகோடுகள். XYZ, LMN என்பன இரு குறுக்கு வெட்டிகள். இவை இணைகோடுகளை முறையே X, L ; Y, M ; Z, N என்ற புள்ளிகளில் சந்திக்கின்றன.

XNஐச் சேர். இது CDயை Oவில் வெட்டட்டும்.

$$\therefore \frac{XY}{YZ} = \frac{XO}{ON} = \frac{LM}{MN}$$ என ஆகும்.

குறிப்பாக நேர்கோட்டுத்துண்டுகளும், ஒரே கோட்டில் ஏற்படும் அவைகளின் வீழல்களும் (Projections) விகிதசமப் பொருத்தத்தில் இருக்கும்.

பயிற்சி 3

1. ஒரு முக்கோணத்தின் ஒரு பக்கத்தின் நடுப்புள்ளி வழியே, மற்ற பக்கத்திற்கு இணையாக வரையப்படும் நேர் கோடு மூன்றுவது பக்கத்தைச் சமமாக வெட்டும்.

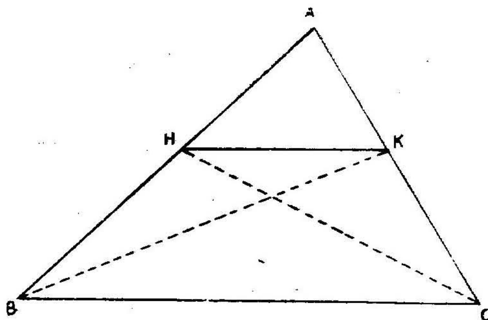
2. ஒரு முக்கோணத்தின் இரு பக்கங்களின் நடுப்புள்ளி களைச் சேர்க்கும் கோடு மூன்றுவது பக்கத்திற்கு இணையாகும்.

3. ABCD என்ற டிரெபீஸியத்தில் AB || CD. ACயும் BD யும் Oவில் சந்திக்கின்றன. $\frac{AO}{OC} = \frac{BO}{OD}$ எனக் காட்டு.

4. ABC என்ற முக்கோணத்தில் AB, ACயில் X, Y என்ற புள்ளிகள் $3AX = AB$; $3CY = CA$ எனும்படி உள்ளன. Cயை ABயின் நடுப்புள்ளியுடன் சேர்க்கும் கோடு XYக்கு இணை என நிரூபி.

5. ABC என்ற முக்கோணத்தில் ABயை Nஇலும், ACயை Mஇலும் வெட்டுமாறு ஒரு நேர்கோடு அமைந்துள்ளது. $\frac{BN}{NP} = \frac{BL}{LC}$ எனவும், $\frac{AM}{MC} = \frac{AN}{NP}$ எனவும் நிரூபி. அதிலிருந்து $BL \cdot CM \cdot AN = LC \cdot MA \cdot NB$ எனக் காட்டு.

தேற்றம் 4 : (தேற்றம் 3ன் மறுதலை). ஒரு நேர்கோடு ஒரு முக்கோணத்தின் இரண்டு பக்கங்களை ஒரே விகிதத்தில் அமையும் இரு துண்டுகளாக வெட்டினால், அந்த நேர்கோடு மூன்றுவது பக்கத்திற்கு இணையாகும்.



கொள்கை : $\triangle$ ABCயில் HK ஆனது ABயை Hஇலும், ACயை Kஇலும் வெட்டுகிறது. $\frac{AH}{HB} = \frac{AK}{KC}$.

நிரூபிக்க : HK $\parallel$ BC.

வரைதல் : BK, HCயைச் சேர்.

நிரூபணம் : $\frac{AH}{HB} = \frac{\triangle AHK}{\triangle HKB}$ $\left\{ \because \text{ இரு முக்கோணங்களுக்கும் K பொதுமுனை} \right\}$

$\frac{AK}{KC} = \frac{\triangle AHK}{\triangle HKC}$ $\left\{ \because \text{ H பொது முனை} \right\}$

ஆனால் $\frac{AH}{HB} = \frac{AK}{KC}$ (கொள்கை)

$\therefore \frac{\triangle AHK}{\triangle HKB} = \frac{\triangle AHK}{\triangle HKC}$

$\therefore \triangle HKB = \triangle HKC$

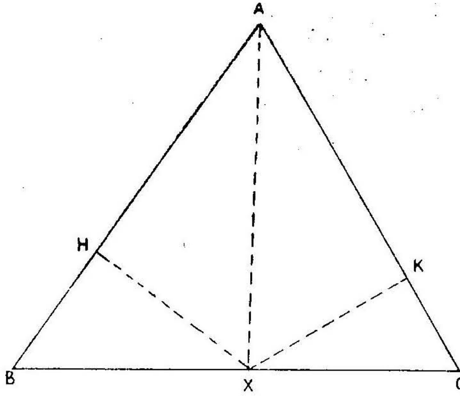
இவைகட்கு HK பொதுவான அடிப்பக்கம்

$\therefore$ BC $\parallel$ HK

அதாவது HK $\parallel$ BC.

தேற்றம் 5: ஒரு முக்கோணத்தில், ஒரு கோணத்தின் (உள் அல்லது வெளி) சமவெட்டி எதிர்ப்பக்கத்தை (உள்ளே அல்லது புறம்பே) கோணம் அடக்கிய பக்கங்களின் விகிதத்தில் பிரிக்கும்.





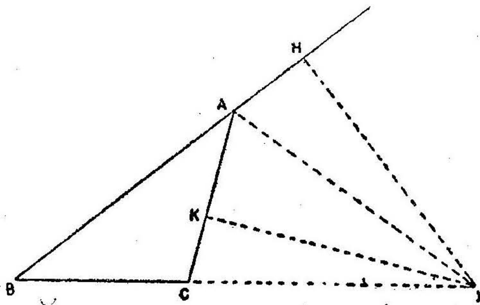
கொள்கை : $\triangle$ ABCயில் $\angle$ Aயின் சமவெட்டியான AX, BCயை Xல் வெட்டுகிறது.

நிருபிக்க : $\dfrac{BX}{XC} = \dfrac{AB}{AC}$.

வரைதல் : AB, ACக்கு முறையே XH; XK என்ற குத்துக் கோடுகளை வரை.

நிருபணம் : $\dfrac{BX}{XC} = \dfrac{\triangle BAX}{\triangle XAC}$ ($\because$ A பொது முனை)

$$= \frac{\frac{1}{3}\ AB \cdot HX}{\frac{1}{2} \cdot AC \cdot KX}.$$

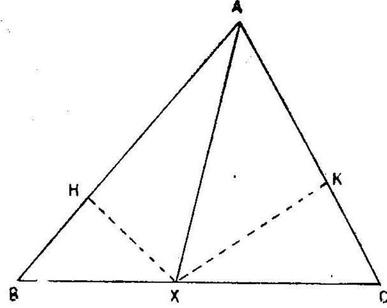


AX என்பது $\angle$ Aயின் சமவெட்டியானதால் XH = XK.

$$\therefore \frac{BX}{XC} = \frac{AB}{AC}.$$

(இரு படங்களுக்கும் இந்த நிருபணம் பொருந்தும்)

தேற்றம் 6. (தேற்றம் 5ின் மறுதலை) ABC என்ற முக்கோணத்தின் BC என்ற பக்கம் Xல் (உள்ளேயோ அல்லது புறம்பாகவோ) AB : AC என்ற விகிதத்தில் பிரிக்கப்பட்டால் AK என்பது ∠BACயின் (உள் அல்லது வெளி) சமவெட்டியாகும்.



கொள்கை : △ ABCயில் BC என்ற பக்கம் Xல் BX : XC = AB : AC எனும்படி உள்ளது.

நிரூபிக்க : AX என்ற கோடு ∠BACயின் சமவெட்டி.

வரைதல் : Xலிருந்து AB, ACக்கு முறையே XH; XK என்ற குத்துக் கோடுகள் வரைக.

நிரூபணம் :

$$\frac{BX}{XC} = \frac{\triangle BAX}{\triangle XAC} \quad (\text{A பொது முனை})$$

$$= \frac{\frac{1}{2} BA \cdot XH}{\frac{1}{2} AC \cdot XK}$$

$$= \frac{BX \cdot XH}{XC \cdot XK} \quad \left(\because \frac{BA}{AC} = \frac{BX}{XC}\right)$$

$$\therefore \ 1 = \frac{XH}{XK}$$

$\therefore$ XH = XK.

$\therefore$ X என்ற புள்ளி ∠BACயின் சமவெட்டியில் அமைகிறது.

$\therefore$ AX என்ற கோடு ∠BACயின் சமவெட்டியாகும்.

பயிற்சி 4

A

(1) △ ABCயில் BC = 7 செ. மீ.; CA = 4 செ. மீ; AB = 6 செ. மீ. ∠BACயின் உள், வெளிச் சமவெட்டிகள் BCயையும், அதன் நீட்சியையும் X, Y என்ற புள்ளிகளில் வெட்டினால் BX, BYயின் நீளங்களைக் கணக்கிடு.

(2) ஒரு முக்கோணத்தின் பக்கங்கள் முறையே 7 செ. மீ.; 9 செ. மீ. மிகச் சிறிய கோணத்தின் உள், வெளிச் சமவெட்டிகள் எதிர்ப்பக்கத்தை முறையே X, Yல் வெட்டினால் XYன் நீளம் என்ன?

(3) △ ABCயில் BC = a; CA = b; AB = c அலகுகள். ∠Aயின் உள் சமவெட்டி BCயை Xல் வெட்டுகிறது. BX, XCயின் நீளங்களை a, b, cயில் காண்க.

(4) மேற் கணக்கில் ∠B, ∠Cயின் உள் சமவெட்டிகள் Iல் சந்தித்தால் AI : IX என்ற விகிதத்தை a, b, cயில் காண்க.

(5) முன் கணக்கில் ∠Aயின் வெளிச் சமவெட்டி BCயின் நீட்சியை Yல் சந்தித்தால் BY, CYயின் நீளங்களை a, b, c மூலம் கண்டுபிடி.

(6) முன் கணக்கில் ∠Bயின் உள் சமவெட்டி AYயை I_2வில் சந்தித்தால் $AI_2 : I_2Y$ன் மதிப்பை a, b, cயில் கணக்கிடு.

B

1. △ ABCயில் D என்பது BCயின் நடுப்புள்ளி ∠ADB, ∠ADCகளின் சமவெட்டிகள் AB, ACயை P, Qவில் வெட்டினால் PQ || BC என நிரூபி.

2. ஒரு நாற்கரத்தின் ஒரு ஜோடி எதிர்க் கோணங்களின் சமவெட்டிகள் ஒரு மூலை விட்டத்தில் சந்திக்கின்றன. மற்ற இரு எதிர்க் கோணங்களின் சம வெட்டிகள் மற்ற மூலைவிட்டத்தில் சந்திக்கின்றன எனக் காட்டு.

3. △ ABCயில் ∠Aயின் சமவெட்டி BCயை Pல் வெட்டுகிறது. BAவுக்கு இணையாக வரையப்படும் PQ என்ற கோடு ACயைக் Qவிலும்; ACக்கு இணையாக வரையப்படும் PR என்ற கோடு ABயை Rஇலும் வெட்டினால் $BR : CQ = BA^2 : CA^2$ என்று காட்டு.

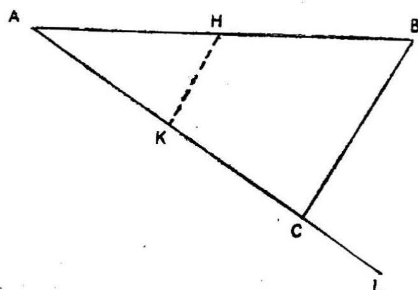
4. இரு வட்டங்கள் ஒன்றையொன்று உள்ளே Aயில் தொடுகின்றன. சிறிய வட்டத்திற்கு R என்ற புள்ளியில் வரையப்படும் தொடுகோடு பெரிய வட்டத்தை PQவில் வெட்டுகிறது. PR : RQ = AP : AQ என்று காட்டு.

5. ABCD என்ற இணைகரத்தில் ∠A, ∠Bயின் சமவெட்டிகள் BD, ACயை X, Yல் வெட்டுகின்றன. XY || AB என்று நிரூபி.

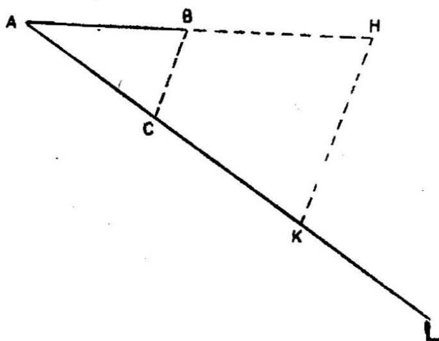
வரைதல் முறைகள்

வரைதல் 1. ஒரு நேர் கோட்டுத் துண்டை ஒரு குறிப்பிட்ட விகிதத்தில் (*a*) உள்ளே (*b*) புறம்பாகப் பிரிக்க.

AB என்ற நேர் கோட்டுத் துண்டை Hல் $m : n$ என்ற விகிதத்தில் பிரி.



(*a*) உள்ளே பிரிக்கும் முறை: A வழியே AL என்ற கோடு வரை. ALல் AK $= m$ அலகுகள் வெட்டவும். பிறகு AK என்ற திசையிலேயே தொடர்ந்து KC $= n$ அலகுகள் இருக்கும்படி வெட்டு. CBயைச் சேர். CBக்கு இணையாக KH என்ற கோடு வரை. அது ABயை Hல் வெட்டினால் $\frac{AH}{HB} = \frac{AK}{KC} = \frac{m}{n}$ ஆகும்.

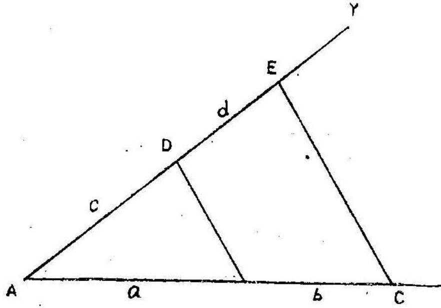


(*b*) புறம்பாகப் பிரித்தல்: மேலே கூறியதுபோல் AK $= m$ அலகுகள் கொள்க. பிறகு KAயின் திசையில் KC $= n$ அலகுகள் கொள்க. CBயைச் சேர். CBக்கு இணையாக KHஐ வரை. இது ABயை Hல் வெட்டினால் $\frac{AH}{HB} = \frac{AK}{KC} = \frac{m}{n}$ ஆகும்.

குறிப்பு: விகிதம் $m : n$ல் n என்பது mஐவிட அதிகமானல் KC ஆனது KAயை விட அதிகமாகும். ஆகவே C என்ற புள்ளி KAயின் நீட்சியில் அமையும்.

வரைதல் 2. 'a', 'b', 'c' என்ற எண்களின் 4ம் விகித சம எண் (4th proportional) வரைதல் மூலம் காண.

$a : b = c : d$ என்ருல் d என்பது a, b, cயின் 4ம் விகித சம எண் எனப்படும்.

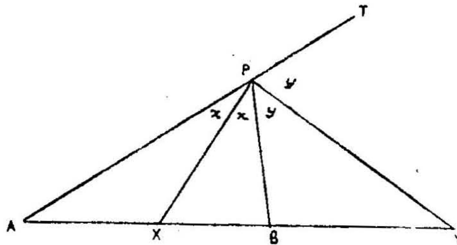


ஒரு நேர்கோட்டில் AB $= a$; BC $= b$ எனும் நீளங்களில் கோட்டுத் துண்டுகளைக் கொள்ளவும். ஏதேனும் ஒரு கோணத்தில் Ay எனும் கோடு வரையவும். அதில் AD = C எனும்படி D எனும் புள்ளியைக் குறிக்கவும். BDஐச் சேர்க்க. C வழி BDக்கு இணையாகக் கோடு வரைக. இந்தக் கோடு Ay எனும் கோட்டை Eயில் வெட்டட்டும். DEஇன் நீளம் 'd' ஆகுக. a, b, c என்ற எண்களின் 4வது விகித சம எண் 'd' ஆகும். ஏனெனில் BD $\|^e$ CE ஆவதால் $\frac{AB}{BC} = \frac{AD}{DE}$

$$\therefore \quad \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ ஆகும்.}$$

வரைதல் 3. a, b, என்ற எண்களின் மூன்ரும் விகிதசமன் (Third proportional) காண. a, b, b என்ற எண்களின் 4வது விகிதசமன் a, b என்ற எண்களின் 3வது விகிதசமன் எனப் பெயர் பெறும். ஆகவே வரைதல் 2இன்படி a, b, b என்ற எண்களுக்கு 4வது விகிதசமன் காண்க.

அபொலோனியசின் தேற்றம் :



A, B, என்ற இரு புள்ளிகளிலிருந்து AP : PB = $m : n$ என்ற விகிதத்தில் நகரும் P எனும் புள்ளியின் நியமப் பாதை AB ஐ உள்ளாகவும், புறம்பாகவும் $m : n$ என்ற விகிதத்தில் பிரிக்கும் X, Y, என்ற புள்ளிகளை விட்ட முனைகளாகக் கொண்ட வட்டமாகும்.

வரைதல் : AP : PB = $m : n$ என்ற விகிதத்தில் இருக்குமாறு ஏதேனும் ஒரு புள்ளி P ஐக் கொள்க.

AB ஐ உள்ளாகவும் புறம்பாகவும் X, Y, எனும் புள்ளிகளில் $m : n$ என்ற விகிதத்தில் பிரிக்கவும் PX, PY ஐச் சேர்க்கவும்.

நிரூபணம் : AX : XB = AP : PB ஆவதால் PX கோணம் APB யின் உள்சமவெட்டியாகும்.

$\therefore \angle APX = \angle XPB = x^\circ$ ஆகுக.

AP யின் நீட்சியில் T ஒரு புள்ளி ஆகுக

AY : YB = AP : PB ஆவதால்

PY, கோணம் BPT யின் சமவெட்டியாகும்

$\therefore$ BPY = YPT = y° ஆகுக

$\therefore 2x + 2y = \angle APT = 180^\circ$

$\therefore x + y = 90^\circ$

$\therefore \angle XPY = 90^\circ$

$\therefore$ P எனும் புள்ளி XY ஐ விட்டமாகக் கொண்ட வட்டத்தில் அமைகிறது.

பயிற்சி 5

(செயல் முறை)

1. 5·2 அங். நீளமுள்ள AB என்ற கோடு வரைந்து அதை P என்ற புள்ளியில் 3 : 2 என்ற விகிதத்தில் உள்ளே பிரி. AB யின் நீளத்தை அளந்தெழுது. கணக்கிட்டுச் சரிபார்.

2. 10 செ.மீ. நீளமுள்ள ஒரு நேர்கோடு வரைந்து அதை மூன்று சமபாகங்களாகப் பிரி.

3. 18 செ.மீ. சுற்றளவு உள்ள ஒரு முக்கோணத்தின் பக்கங்களின் விகிதம் 2 : 2 : 3. முக்கோணத்தை வரைந்து அதன் கோணங்களை அள.

4. கீழ்க் கண்ட அளவுகளுக்கு ABC என்ற முக்கோணம் வரை.

(i) $a = 4$ அங். $b : c = 3 : 5$ $\angle A$ யின் உள் சமவெட்டியின் நீளம் 3 · 2 அங்.

(ii) $a = 8$ செ. மீ ; $b : c = 2 : 1$ இடைக்கோடு AD = 5 செ.மீ.

(iii) $\angle A = 55°$; $a = 7·2$ செ.மீ; $b : c = 7 : 4$.

(iv) $a = 7$ செ.மீ ; $\angle c = 72°$; $c : b = 5 : 2$.

(v) $a = 3·5$ அங் ; $2b = 5c$; குத்துயரம் AD = 1·2 அங்.

(vi) $a = 3·2$ அங் ; $c = 3b$; குத்துயரம் BY = ·8 அங்.

5. 2 அங். ஆரமுள்ள வட்டத்தில் BC = 3 அங் ; AB=4AC எனும்படி ஒரு முக்கோணம் வரை. AB, ACயை அள.

[**குறிப்பு** : துணைப்படம் வரைந்து, வரைதல் முறை எழுதிய பின் அதன்படிப் படம் வரை]

வடிவொத்த முக்கோணங்கள்

நேர்கோட்டு உருவங்கள் (Rectilinear figures) ஒரே வடிவமுடையவையானால், அவை வடிவொத்த உருவங்கள் எனப்படும். அவ்வாறு வடிவங்கள் ஒன்றைப் போல் இருக்க வேண்டுமானால்,

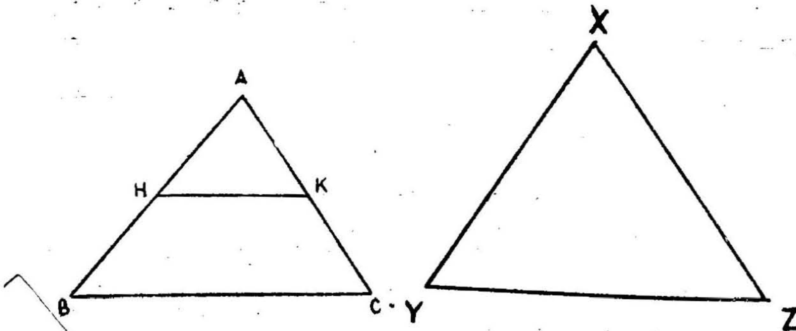
அவைகளின் (1) ஒத்த கோணங்கள் சமமாக இருக்கவேண்டும். (2) ஒத்த நீளங்கள் ஒரே விகிதத்தில் இருக்கவேண்டும்.

இவ்விரண்டு நியமங்களுக்கும் தனித் தனியே உட்பட்டா லின்றி இரண்டு நேர்கோட்டு உருவங்கள் வடிவொத்தவையாக இருக்க முடியாது. எடுத்துக்காட்டாக ஒரு செவ்வகம், ஒரு சதுரம்—இவைகளில் ஒத்த கோணங்கள் சமம். ஆனால் ஒத்த பக்கங்களின் விகிதங்கள் சமமல்ல. ஆகவே, அவை வடிவொத் தவையல்ல. ஒரு சாய்வு சதுரம், ஒரு சதுரம்—இவைகளில் ஒத்த பக்கங்களின் விகிதங்கள் சமம். ஆனால் ஒத்த கோணங்கள் சமமல்ல. ஆகவே இவை வடிவொத்தவையல்ல.

அறைகள், வயல்கள் முதலானவற்றின் கிடைப்படம் வரைந் திருப்பீர்கள். அந்தக் கிடைப்படங்களும் அவை எந்த அறை அல்லது வயல்களைக் குறிக்கின்றனவோ அவைகளுடன் வடிவொத்த உருவங்கள் ஆகும். ஏனெனில் அவைகளின் ஒத்த கோணங்கள் சமமாகவும், ஒத்த பக்கங்களின் விகிதங்கள் ஒரே அளவுத் திட்ட விகிதத்திலும் உள்ளன.

பின்வரும் தேற்றங்களில் முக்கோணங்களைப் பொருத்தமட்டில் இரு முக்கோணங்கள் மேற்கூறிய இருநியமங்களில் ஒன்றுக்கு அடங்கினால், மற்ற நியமத்திற்கும் உட்பட்டிருக்கும் எனக் காட்டுவோம்.

தேற்றம் 7. ஒரு முக்கோணத்தின் கோணங்கள் தனித் தனியே மற்றொரு முக்கோணத்தின் கோணங்களுக்கு முறையே சமமானல், இரு முக்கோணங்களும் வடிவொத்தவையாகும். (அதாவது ஒத்த பாகங்களின் விகிதம் சமமாக இருக்கும்).



கொள்கை : $\triangle ABC$, $\triangle XYZ$ல் $\angle A = \angle X$; $\angle B = \angle Y$; ($\therefore \angle C = \angle Z$)

நிருபி : $\frac{AB}{XY} = \frac{BC}{YZ} = \frac{CA}{ZX}$

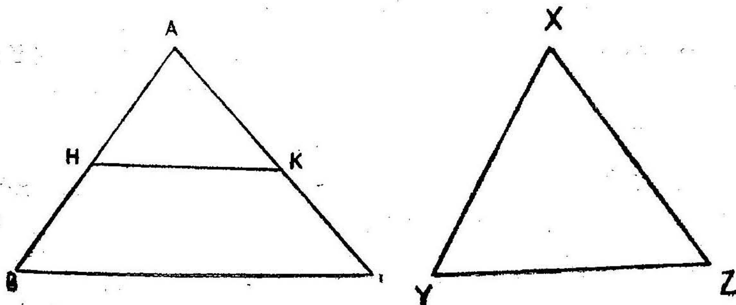
வரைதல் : AB யில் XY இன் நீளத்தில் AK ஐ வெட்டு.
AC யில் XZ இன் நீளத்தில் AK ஐ வெட்டு.
HK ஐச் சேர்.

நிருபணம் : $\triangle AHK$; $\triangle XYZ$ களில்
$AH = XY$ (வரைதல்)
$AK = XZ$ (வரைதல்)
$\angle A = \angle Z$ (கொள்கை)
$\therefore \triangle AHK = \triangle XYZ$
$\therefore \angle AHK = \angle XYZ = \angle ABC$
$\therefore HK \parallel BC$
$\therefore \frac{AB}{AH} = \frac{AC}{AK}$
ஆனால் $AH = XY$; $AX = XZ$
$\therefore \frac{AB}{XY} = \frac{AC}{XZ}$
இதேபோல் $\frac{AB}{XY} = \frac{BC}{YZ}$ என நிருபிக்கலாம்

$\therefore \frac{AB}{XY} = \frac{BC}{YZ} = \frac{CA}{ZX}$

ஒத்த பக்கங்களின் விகிதம் $\therefore$ முக்கோணங்கள் வடிவொத்தவை

தேற்றம் 8 (தேற்றம் 7ன் மறுதலை) இரண்டு முக்கோணங் களில் ஒத்த பக்கங்களின் விகிதங்கள் சமமானல், அவைகளின் ஒத்த கோணங்கள் சமம். (அதாவது அவை வடிவொத்தவை யாகும்)



கொள்கை : $\triangle$ ABC, $\triangle$ XYZ களில் $\frac{AB}{XY} = \frac{BC}{YZ} = \frac{CA}{ZX}$

நிரூபிக்க : $\angle A = \angle C$; $\angle B = \angle Y$; $\angle C = \angle Z$

வரைதல் : A B யில் X Y ன் நீளத்தில் A H ஐ வெட்டு.
A C யில் X N ன் நீளத்தில் A K ஐ வெட்டு.
H K ஐச் சேர்.

நிரூபணம் : $\frac{AB}{XY} = \frac{AC}{XZ}$ (கொள்கை)

$\therefore$ $\frac{AB}{AH} = \frac{AC}{AK}$ ($\because$ XY = AH; XZ = AK வரைதல்)

$\therefore$ HK $\parallel$ BC

$\therefore$ $\angle AHK = \angle ABC$; $\angle AKH = \angle ACB$

$\therefore$ $\triangle$ AHK; $\triangle$ ABCகளில் ஒத்த கோணங்கள் சமம்

$\therefore$ அவை வடிவொத்தவை.

$\therefore$ $\frac{AB}{AH} = \frac{AC}{AK} = \frac{BC}{HK}$ ...... (1)

$\therefore$ $\frac{AB}{XY} = \frac{AC}{YZ} = \frac{BC}{HK}$

ஆனல் $\frac{AB}{XY} = \frac{BC}{YZ}$ $\therefore$ $\frac{BC}{YZ} = \frac{BC}{HK}$

$\therefore$ YZ = HK ...... (2)

$\therefore$ AHK ; $\triangle$ XYZகளில் AH = XY ; AK = XZ ; HK = YZ
(வரைதல்) [$\because$ (2)]

$\therefore$ $\triangle AHK \equiv \triangle XYZ$

$\therefore$ $\angle XYZ = \angle AHK = \angle ABC$

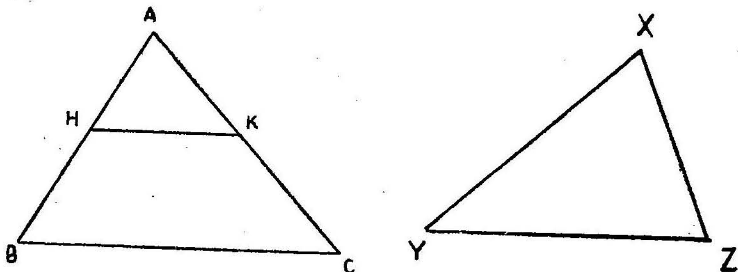
$\therefore$ $\angle XZY = \angle AKH = \angle ACB$

$\therefore$ $\angle A = \angle X$

$\therefore$ $\triangle$ ABC, XYZகளில் $\angle A = \angle X$; $\angle B = \angle Y$; $\angle C = \angle Z$ இம் முக்கோணங்களில் ஒத்த கோணங்கள் சமம்.

$\therefore$ அவை வடிவொத்தவை.

தேற்றம் 9. இரண்டு முக்கோணங்களில் ஒன்றின் ஒரு கோணம் மற்றதில் ஒரு கோணத்திற்குச் சமமாகவும், இக் கோணங்களை அடக்கும் பக்கங்களின் விகிதங்கள் சமமாகவும் இருந்தால் முக்கோணங்கள் இரண்டும் வடிவொத்தவையாகும்.



கொள்கை : $\triangle$ ABC, $\triangle$ XYZகளில் $\angle A = \angle X$; $\frac{AB}{XY} = \frac{AC}{XY}$

நிரூபிக்க : $\triangle ABC \parallel\!| \triangle XYZ$

வரைதல் : AB யில் XY ன் நீளத்தில் AH ஐ வெட்டு
AC யில் XY ன் நீளத்தில் AK ஐ வெட்டு

நிரூபணம் : $\triangle$ AHK, XYZகளில்
AH = XY (வரைதல்)
AK = XZ (வரைதல்)
$\angle A = \angle X$ (கொள்கை)
$\therefore \triangle AHK \equiv \triangle XYZ$
$\therefore \angle AHK = \angle XYZ$ ...... (1)

மேலும் $\frac{AB}{XY} = \frac{AC}{XZ}$ (கொள்கை)

$\therefore \frac{AB}{AH} = \frac{AC}{AK}$ ($\because$ AH=XY; AK=XZ வரைதல்)

$\therefore$ HK $\parallel$ BC

$\therefore \angle ABC = \angle AHK = \angle XYZ$ [$\because$ (1)]

அதாவது $\angle B = \angle Y$

ஆனால் $\angle A = \angle X$ (கொள்கை)

$\therefore \angle A = \angle Z$

இரு முக்கோணங்களிலும் ஒத்த கோணங்கள் சமம்.

$\therefore$ அவை வடிவொத்தவை.

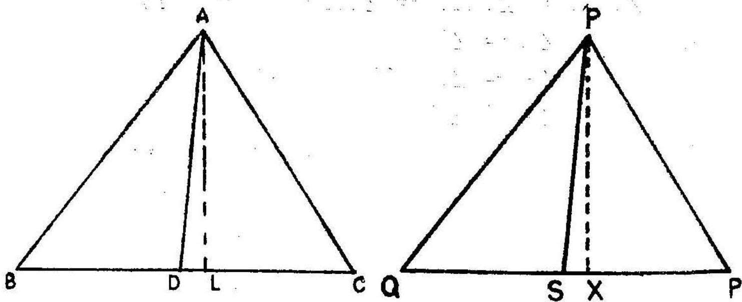
குறிப்பு 1. மூன்று தேற்றங்களிலும் படமும், வரைதலும் ஒன்றே என்பதைக் கவனி. நிரூபணம் $\triangle AHK \equiv \triangle XYZ$ என்பதன் அடிப்படையில் அமைந்திருப்பதையும் காண்க. இவ்வாறாக 'வடிவொத்த முக்கோணங்களின்' தேற்றங்கள் 'சர்வ சம முக்கோணங்களின்' தேற்றங்களின் அடிப்படையில் அமைந்துள்ளன.

2. மூன்று சர்வ சம முக்கோணத் தேற்றங்களுக்கு ஏற்ப மூன்று வடிவொத்த முக்கோணத் தேற்றங்கள் இருப்பது குறிப்பிடத்தக்கது.

சர்வ சமமாக இருக்க	வடிவொத்தவையாக இருக்க
1. இரண்டு கோணங்களும், ஒரு பக்கமும் சமம்.	இரண்டு கோணங்கள் சமம்.
2. மூன்று பக்கங்கள் சமம்.	மூன்று பக்கங்கள் விகித சமப் பொருத்தத்தில் இருக்க வேண்டும்.
3. ஒரு கோணம் சமம். அதை அடக்கிய பக்கங்கள் சமம்.	ஒரு கோணம் சமம். அதை அடக்கிய பக்கங்களின் விகிதங்கள் சமம்.

3. சர்வ சம முக்கோணங்களில், இரண்டு செங்கோண முக்கோணங்களில் கர்ணமும், ஒத்த பக்கமும் சமமானால் முக்கோணங்கள் சர்வ சமம் என்ற நான்காவது தேற்றம் உண்டு. அதுபோலவே இரண்டு செங்கோணங்களில் கர்ணங்களின் விகிதம் ஒத்த பக்கங்களின் விகிதத்திற்குச் சமமானால், இரு செங்கோண முக்கோணங்களும் வடிவொத்தவையாகும்.

மாதிரி: இரண்டு வடிவொத்த முக்கோணங்களில் (*i*) ஒத்த இடைக் கோடுகள் (*ii*) குத்துயரங்கள் ஒத்த பக்கங்களின் விகிதத் திற்குச் சமம்.



கொள்கை: △ ABC ||| △ PQR; AD, BCக்கு இடைக் கோடு PS, QRக்கு இடைக்கோடு.

நிரூபிக்க : $\frac{AD}{PS} = \frac{AB}{PQ}$.

நிரூபணம் : $BD = \frac{1}{2} BC$

$QS = \frac{1}{2} QR$

$\therefore \frac{BD}{QS} = \frac{BC}{QR}$ ஆனல் $\frac{BC}{QR} = \frac{AB}{PR} \left(\because \triangle^s \ |||^r \right)$

$\therefore \triangle ABC \ |||^r \ \triangle PQR \ \underline{|B} = \underline{|Q}$

$\therefore \triangle ABD, \triangle PQS$இல் $\frac{BD}{QS} = \frac{AB}{PQ}$; $\underline{|ABD} = \underline{|PQS}$

∴ முக்கோணங்கள் வடிவொத்தவை.

$\therefore \frac{AD}{PS} = \frac{AB}{PQ}$.

(ii) BCக்கு AL குத்தாகவும், QRக்கு PX குத்தாகவும் வரைக.

$\therefore \triangle ABL, \triangle PQX$இல் $\underline{|B} = \underline{|Q}$; $\underline{|BLA} = \underline{|QXP} = 90°$

$\therefore \triangle ABL \ ||| \ \triangle PQX \quad \therefore \frac{AL}{PX} = \frac{AB}{PQ}$.

உத்திக் கணக்குகள் செய்ய சில குறிப்புகள்

1. இரண்டு வடிவொத்த முக்கோணங்களின் முனைகளைச் சமகோண வரிசையில் எழுதவும். $\angle A = \angle Q$; $\angle B = \angle P$; $\angle C = \angle R$ என இருப்பின் $\triangle ABC \ ||| \ \triangle QPR$ என எழுதவும். இரண்டாவது முக்கோணத்தை $\triangle PQR$ என எழுதுவது நலமல்ல.

2. மேற் கூறியபடி சமகோண வரிசையில் எழுதினல், சம விகிதங்களை எளிதில் எழுதலாம். முதல் முக்கோணத்தின் முனைகளை இரண்டிரண்டாகக் கொண்டு தொகுதியை எழுதவும். அதே வரிசையில் மற்ற முக்கோணத்தின் முனைகளைப் பகுதியில் எழுதவும். $\triangle ABC \ ||| \ \triangle QPR$ ஆனல் $\frac{AB}{QP} = \frac{BC}{PR} = \frac{CA}{RQ}$ ஆகும். இவ்வாறு விகிதங்களை எழுதினல் முடிவு எளிதில் புலனகும்.

அநேகமாகக் கணக்குகளில் முக்கோணங்களின் கோணங்கள் சமம் எனக் காட்ட வேண்டியிருக்கும். கீழ் வகுப்புக்களில் படித்த தேற்றங்களைப் பயன்படுத்தி இவற்றைக் காண இயலும்.

பயிற்சி 6

(1) ஒரு வட்டத்தில் AB, CD என்ற இரு நாண்கள் Oவில் வெட்டிக் கொள்கின்றன. $\triangle AOB \,|||\, \triangle BOD$ என்றும், $AO \cdot OB = CO \cdot OD$ என்றும் காட்டு.

(2) $\triangle ABC$யில் $\angle A = 90°$. $AD \perp BC$. $\triangle ABD \,|||\, \triangle ADC$ எனவும் $BD : DC = BA^2 : CA^2$ எனவும் நிரூபி.

(3) A என்ற புள்ளிவழியே செல்லும் நேர்கோடு ஒரு வட்டத்தை PQவில் வெட்டுகிறது. Aயிலிருந்து வட்டத்திற்கு வரையப்படும் தொடுகோடு அதை R என்ற புள்ளியில் தொடுகிறது. $\triangle ARP \,|||\, \triangle AQR$ என்றும் $AP \cdot AQ = AR^2$ என்றும் நிரூபி.

(4) ஒரு வட்டத்தினுள் வரையப்படும் ABC என்ற முக்கோணத்தில் $\angle A$யின் சமவெட்டி BCயை Dயிலும், வட்டத்தை Xஇலும் வெட்டுகிறது. $AB \cdot AC = AX \cdot XD$ எனக் காட்டு.

(5) $\triangle ABC$யில் I, I_1, I_2, I_3 என்பன வழக்கம் போல் உள்ள உள், வெளித்தொடு வட்டங்களின் மையங்களாகும். $\triangle I_1 I_2 I_3$; $\triangle BI_1 C$; $\triangle CI_2 A$; $\triangle AI_3 B$ இவைகள் ஒன்றுக்கொன்று வடிவொத்தவை என்று நிரூபி. அதிலிருந்து $I_1 C \cdot I_2 C = CB \cdot CA = CI \cdot CI_3$ என்றும் $AI \cdot II_1 = BI \cdot II_2$ என்றும் காட்டு.

(6) ABC என்ற முக்கோணத்தில் AD, BE, CF என்ற குத்துயரங்கள் வரையப்படுகின்றன. $\triangle BFE$, $\triangle CDE$; $\triangle AEF$, $\triangle ABC$ இவை ஒன்றுக்கொன்று வடிவொத்தவை என்றும், $AF \cdot FB = FD \cdot FE$ என்றும் காட்டு.

(7) ஒரு வட்டத்தினுள் ABC என்ற முக்கோணம் வரையப் பட்டுள்ளது. $AD \perp BC$. A வழியே செல்லும் வட்டத்தின் விட்டம் வட்டத்தை Xல் வெட்டினால் $\triangle ABX \,|||\, \triangle ADC$ என்றும் $AB \cdot AC = 2\,AD \cdot$ வட்ட ஆரம் என்றும் நிரூபி.

(8) இரண்டு வடிவொத்த முக்கோணங்களில் ஒத்த நீளங் களின் விகிதங்கள் (அதாவது இடைக்கோடுகள், குத்துயரங்கள், சுற்று வட்ட ஆரங்கள்) ஒத்த பக்கங்களின் விகிதத்திற்குச் சமம் — நிரூபி.

(9) $\triangle ABC$யில் $\angle A = 2\angle B$. $\angle A$யின் சமவெட்டி BCயை Xல் சந்தித்தால் (*i*) $XC \cdot CA = XA \cdot AB$ (*ii*) $XA^2 \cdot AB^2 = XC : CB$ என நிரூபி.

(10) ஒரு வட்டத்தினுள் PQR என்ற முக்கோணம் வரையப்பட்டுள்ளது. வட்டத்திற்கு RA என்ற தொடுகோடு, QPஐ Aயில் வெட்டுகிறது. $AP : AQ = PR^2 : QR^2$ என நிரூபி.

(11) AB, CD என்ற இரு நேர்கோட்டுத் துண்டுகள் Oவில் வெட்டிக்கொள்கின்றன.

$AO : OB = CO \cdot OD$ எனில் ABCD ஒரு வட்ட நாற்கரம்—நிரூபி.

(12) $\triangle ABC$யில் $\angle A = 90°$. BCக்கு BD என்ற குத்துக் கோடு A இருக்கும் பக்கத்திற்கு எதிர்ப்புறமாய் வரையப்படுகிறது. $BD \cdot DC = AP \cdot AC$ எனில் $\angle CPD$ செங்கோணம் எனக் காட்டு.

(13) ABCD என்ற நாற்கரத்தில் $AB \cdot AC = BC : AD = CA : CD$ எனில் AB, CD என்ற பக்கங்களை இணைப்பக்கங்களாக உடைய டிரெபீஸியமாக நாற்கரம் அமையும் என்று காட்டு.

(14) இரண்டு வட்டங்களுக்கு வரையப்படும் பொதுத் தொடு கோடு வட்ட மையங்களுக்கிடையே உள்ள தூரத்தை ஆரங்களின் விகிதத்தில் (உள்ளேயோ, புறம்பாகவோ) பிரிக்கும் எனக் காட்டு.

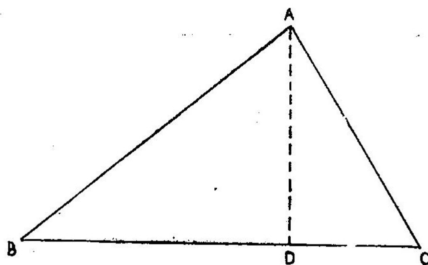
(15) $\triangle ABC$யில் $\angle A$யின் சமவெட்டியில் P என்ற புள்ளி $AP^2 = AB \cdot AC$ எனும்படி உள்ளது. $\triangle APB \,|||\, \triangle ACB$ என நிரூபி.

(16) AB என்பது வட்டம் ABCயின் விட்டம். A, B என்ற புள்ளிகளில் வரையப்படும் தொடுகோடுகளை Cயில் வரையப்படும் தொடுகோடு D, Eல் வெட்டுகிறது. $CP \perp AB$ ஆகவும் வரையப்படுகிறது எனில் (*i*) A, Q, E ஒரு கோட்டில் அமையும் புள்ளிகள் என்றும் (*ii*) $CQ = QP$ என்றும் நிரூபி.

(17) ஒரு முக்கோணத்தின் உள் தொடுவட்டம் பக்கங்களைத் தொடும் புள்ளிகளால் ஆன முக்கோணமும், வெளித் தொடுவட்ட மையங்களாலான முக்கோணமும் வடிவொத்தவை எனக் காட்டு.

(18) $\triangle ABC$யில் சுற்றுவட்ட மையம் S. குத்துக்கோட்டு மையம் (Ortho centre) O. X, Y, Z என்பவை முறையே BC, CA, AB என்ற பக்கங்களின் நடுப்புள்ளிகள். $\triangle$ முக்கோணங்கள் SYZ, SZX, SXY என்பவை முறையே OBC, OCA, OAD என்ற முக்கோணங்களுடன் வடிவொத்தவை என நிரூபி.

தேற்றம் 10. ஒரு செங்கோண முக்கோணத்தில் கர்ணத்திற்கு எதிர்முனையிலிருந்து வரையப்படும் குத்துக்கோடு, முக்கோணத்துடன் வடிவொத்த இரு முக்கோணங்களாகச் செங்கோண முக்கோணத்தைப் பிரிக்கிறது.



கொள்கை: $\triangle$ ABCயில் $\angle$A = செங்கோணம். AD $\perp$ BC.

நிரூபிக்க: *i* $\triangle$ ABD ||| $\triangle$ ABC
ii $\triangle$ ADC ||| $\triangle$ ABC
iii $\triangle$ ADC ||| $\triangle$ ABD

நிரூபணம்: $\angle BAD + \angle ABD = 90°$
$\angle ACB + \angle ABC = 90°$
$\angle BAD = \angle ACB$ ($\because$ $\angle$ABCயும், $\angle$ABDயும் ஒன்றே)
இதேபோல் $\angle CAD = \angle ABC$

$\triangle$ ABD, ABCகளில் $\angle ABD = \angle ABC$ $\angle BAD = \angle ACB$ இரண்டிலும் ஒத்த கோணங்கள் சமம்.

$\therefore$ $\triangle$ ABD ||| $\triangle$ CBA ... ... (*i*)
இதேபோல் $\triangle$ ADC ||| $\triangle$ BAC ... ... (*ii*)
$\triangle$ ABD ||| $\triangle$ CAD ... ... (*iii*)

மேலேயுள்ள தேற்றத்திலிருந்து கீழ்வரும் முடிவுகள் புலனாகும்.

(*i*) $BA^2 = BD \cdot BC$ $\because$ $\triangle$ ABD ||| $\triangle$ CBA

$$\therefore \frac{AB}{CB} = \frac{BD}{BA}.$$

$$\therefore BA^2 = BD \cdot BC.$$

(ii) $CA^2 = CB \cdot CD$ $\quad \because \triangle ADC \ ||| \ \triangle BAC.$

$$\therefore \frac{AC}{DC} = \frac{BC}{AC}.$$

$$\therefore CA^2 = BC \cdot CD.$$

(iii) $DA^2 = DB \cdot DC$ $\quad \because \triangle ABD \ ||| \ \triangle CAD$

$$\therefore \frac{AD}{BD} = \frac{CD}{AD}$$

$$\therefore AD^2 = DB \cdot DC.$$

(iv) $\therefore BA^2 + CA^2 = BC \cdot BD + CB \cdot CD$

$$= BC\,(BD + CD)$$

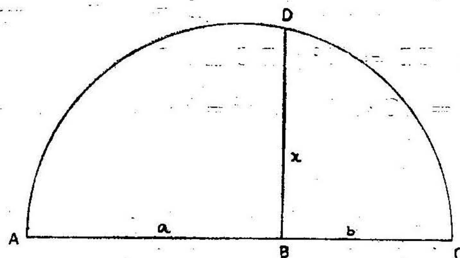
$$= BC \cdot BC$$

$$= BC^2$$

இவ்வாறு பிதாகரஸ் தேற்றம் இதனுல் தெளிவாகிறது.

வரைதல் 3. a, b என்ற இரு எண்களுக்கு 'இடைவிகிதம்' (Mean Proportion) வரைதல் வழி காண்க.

அதாவது $\frac{a}{x} = \frac{x}{b}$ எனும்படி xஐக் காண வேண்டும்.



முறை 1.

(i) $(a + b)$ நீளமுள்ள AC என்ற கோடு வரைக.

(ii) ACயில் B என்ற புள்ளியை $AB = a$ எனும்படிக் கொள்க.

(iii) ACயை விட்டமாக உடைய அரைவட்டம் வரைக.

(iv) ACக்கு BD என்ற குத்துக்கோடு வரை. அது அரைவட்டத்தை Dல் வெட்டட்டும்.

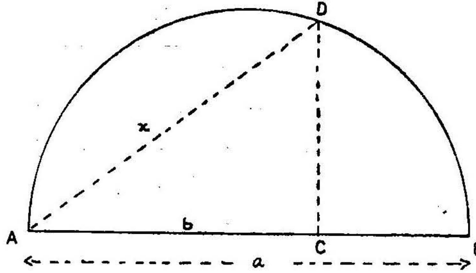
$BD = x$ அலகு எனில் $\frac{a}{x} = \frac{x}{b}$ ஆகும்.

நிரூபணம்: $\angle ADC$ = செங்கோணம். $BD \perp AC$.

$$\therefore \quad BD^2 = BA \cdot BC$$

$$\therefore \quad x^2 = a \cdot b$$

$$\therefore \quad \frac{a}{x} = \frac{x}{b}.$$



முறை 2.

a என்பது bஐ விட அதிகமானால் $AB = a$ எனும்படி நேர் கோடு வரை. ABயில் C என்ற புள்ளியை $AC = b$ எனும்படிக் கொள்க. ABயை விட்டமாகக் கொண்டு ஒரு அரை வட்டம் வரை. ABக்குக் குத்தாக வரையப்படும் CD என்ற கோடு அரை வட்டத்தை Dயில் வெட்டட்டும். $AD = x$ எனில் $\frac{a}{x} = \frac{x}{b}$ ஆகும்.

ஏனெனில் $\angle ADB = 90°$; $DC \perp AB$.

$$\therefore \quad AD^2 = AC \cdot AB \quad \therefore \quad x^2 = b \cdot a = ab \quad \therefore \quad \frac{a}{x} = \frac{x}{b}.$$

குறிப்பு: 1. x என்பது abன் வர்க்க மூலம் என்பதைக் கவனி.

2. ஆகவே N என்ற எண்ணின் வர்க்கமூலத்தைப் படம் மூலம் காண, Nஐ இரண்டு காரணிகள் a, bயின் பெருக்கற்பலனாகக் கண்டு மேற் கூறிய வழியில் abயின் வர்க்க மூலத்தைக் காணவும்.

பயிற்சி 7

A

(செயல் முறை)

1. 6, 4 இவைகளின் இடை விகிதம் காண்க.

2. 21ன் வர்க்க மூலத்தை வரைதல் முறை வழி காண்க.

3. 42, 4 · 2 இவைகளின் வர்க்கமூலத்தைப் படம் வரைந்து காண்க.

4. ஒரு செவ்வகத்தின் பக்கங்கள் முறையே 8 செ. மீ.; 11 செ. மீ இதன் பரப்புக்குச் சமமான சதுரத்தின் பக்க நீளம் என்ன?

5. 2 அங். பக்கமுள்ள ஒரு சாய்வு சதுரத்தின் ஒரு கோணம் 115°. சாய்வு சதுரம் வரைந்து அதன் பரப்புக்குச் சமமான சதுரம் வரை.

6. முறையே 4, 5, 6 செ. மீ. பக்கங்கள் உள்ள ஒரு முக்கோணம் வரைந்து அதன் பரப்புக்குச் சமமான சதுரம் வரை.

7. 5·2 அங். நீளமுள்ள AB என்ற நேர் கோடு வரை. அதனை உள்ளே P என்ற புள்ளியில் 9 : 4 என்ற விகிதத்தில் பிரி. ABயில் $AX^2 = AP \cdot AB$ எனும்படி X என்ற புள்ளியைக் காணவும்.

8. 4 · 6 அங். நீளமுள்ள AB என்ற கோட்டை P, Qவில் சமமாகப் பிரிக்கவும். A Bயில் XY என்ற புள்ளிகளை $AX^2 = AP \cdot AB$ எனவும், $AY^2 = AQ \cdot AB$ எனவும் இருக்கும்படிக் காண்க.

B

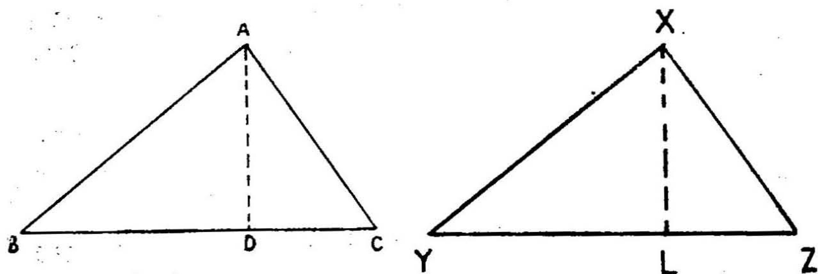
(அறிமுறைக் கணக்குகள்)

9. இரண்டு வெளித்தொடு வட்டங்களின் பொதுத் தொடு கோட்டின் நீளம் அவைகளின் விட்டங்களின் பெருக்கிடை (Mean proportion) எனக் காட்டு.

10. AB என்பது Oவை மையமாக உடைய வட்டத்தின் விட்டம். வட்டத்திலுள்ள C என்ற புள்ளியில் வரையப்படும் தொடுகோடு, A, B என்ற புள்ளிகளில் வரையப்படும் தொடு கோடுகளை P, Qவில் வெட்டுகிறது. $OC^2 = CP \cdot CQ$ எனவும் $OA^2 = AP \cdot BQ$ எனவும் நிரூபி.

11. ஒரு அரைவட்டத்தின் விட்டம் ABயானது சம துண்டு களாக X_1, X_2, X_3 ... என்ற புள்ளிகளில் பிரிக்கப்படுகின்றன. ABக்கு இப்புள்ளிகளில் வரையப்படும் குத்துக் கோடுகள் வட்டத்தை P_1, P_2, P_3 ... என்ற புள்ளிகளில் வெட்டுகின்றன எனில் $\frac{1}{OP_1} = \frac{2}{OP^2} = \frac{3}{OP_3}$ ... என நிரூபி.

தேற்றம் 11. இரண்டு வடிவொத்த முக்கோணங்களின் பரப்புக்களின் விகிதம் அவற்றின் ஒத்த பக்கங்களின் வர்க்கங் களின் விகிதமாகும்.



கொள்கை : $\triangle$ ABC ||| $\triangle$ XYZ. அதாவது

$$(i) \quad \frac{AB}{XY} = \frac{BC}{YZ} = \frac{AC}{XZ}$$

$$(ii) \quad \angle A = \angle X, \ \angle B = \angle Y; \ \angle C = \angle Z.$$

நிரூபிக்க : $$\frac{\triangle ABC}{\triangle XYZ} = \frac{BC^2}{YZ^2}$$

வரைதல் : AD $\perp$ BC; XL $\perp$ YZ ஆக வரை.

நிரூபணம் : $\triangle$ ABD; $\triangle$ XYL களில்

$$\angle B = \angle Y; \quad \angle D = \angle L = 90^\circ$$

$\therefore$ இவைகளில் ஒத்த கோணங்கள் சமம்.

$\therefore$ $\triangle$ ABD ||| $\triangle$ XYL

$$\therefore \frac{AD}{XL} = \frac{AB}{XY} = \frac{BC}{YZ} \left(\because \frac{AB}{XY} : \frac{BC}{YZ} \right)$$

$$\therefore \frac{\triangle ABC}{\triangle XYZ} = \frac{\frac{1}{2} BC \cdot AD}{\frac{1}{2} YZ \cdot XL} = \frac{BC}{YZ} \cdot \frac{AD}{XL} = \frac{BC}{YZ} \cdot \frac{BC}{YZ}$$

$$\therefore \frac{\triangle ABC}{\triangle XYZ} = \frac{BC^2}{YZ^2} = \left(\frac{AB^2}{XY^2}\right) \left(\frac{AC^2}{XZ^2}\right).$$

பயிற்சி 8

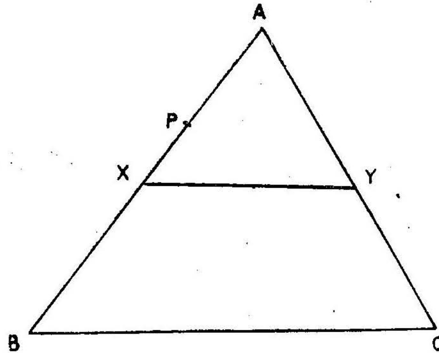
1. ஒரு செங்கோண முக்கோணத்தின் பக்கங்களின் மேல் ஒத்த வடிவுடைய முக்கோணங்கள் வரையப்படுகின்றன. மிகப் பெரிய முக்கோணத்தின் பரப்பு, மற்ற இரு முக்கோணப் பரப்புகளின் கூடுதல் என நிரூபி.

2. $\triangle$ ABCயில் P என்ற புள்ளி ABயை $l : m$ எனப் பிரிக்கிறது. ABயில் X என்ற புள்ளி $AX^2 = AP \cdot AB$ எனும்படி அமைந்துள்ளது. BCக்கு XY என்ற இணைகோடு ACயை Yல் வெட்டினால் $\triangle AXY : \triangle ABC = l : l + m$ என்று காட்டு.

3. $\triangle$ ABCயில் $BP \cdot BC = PC^2$ எனும்படி BCயில் P என்ற புள்ளி உள்ளது. ABக்கு இணையாகவுள்ள PD என்ற கோடு ACயை Dயில் வெட்டினால் PAB, PCD என்பவை சம பரப்புள்ள முக்கோணங்களாகும் என்று நிரூபி.

4. AB என்பது ஒரு வட்டத்தின் விட்டம். வட்டத்திற்கு C என்ற புள்ளியில் உள்ள தொடுகோட்டிற்கு AM ; BN என்பவை குத்துக் கோடுகளானால் $\triangle ACM + \triangle BCN = \triangle ABC$ என நிரூபி.

வரைதல் 4. ABC என்ற முக்கோணத்தின் பரப்பை, முக்கோணத்தின் ஒரு பக்கத்திற்கு இணையாக ஒரு கோடு வரைந்து, பரப்பை $l : m$ என்ற விகிதத்தில் பிரித்தல்.



வரைமுறை காணல் :

$\triangle$ ABCயில் XY $\parallel$ BC

$\dfrac{\triangle AXY :}{\text{சரிவகம் } XYCB}$ டிரெபீஸியம் $\dfrac{l}{m}$.

$\therefore \quad \triangle AXY : \triangle ABC = l : l + m.$

XY $\parallel$ BC ஆனால் $\triangle AXY$ ||| $\triangle ABC$.

$\therefore \quad \dfrac{\triangle AXY}{\triangle ABC} = \dfrac{AX^2}{AB^2} \qquad \therefore \dfrac{AX^2}{AB^2} = \dfrac{l}{l + m}.$

$\therefore \quad AX^2 = \frac{l}{l+m} \cdot AB \cdot AB.$

$\therefore$ ABயில் P என்ற புள்ளியை $AP = \frac{l}{l+m} \cdot AB$ எனக் காணவும்.

$\therefore \quad \frac{AP}{AB} = \frac{l}{l+m} \qquad \therefore \quad \frac{AP}{PB} = \frac{l}{m}.$

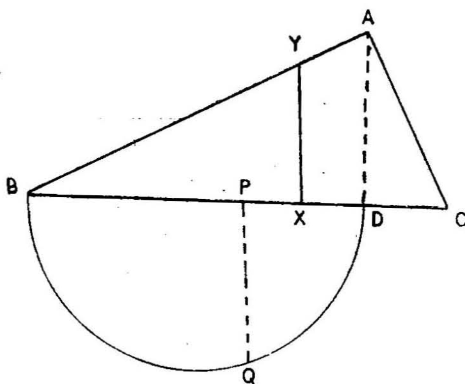
வரைமுறை : ஆகவே AB என்ற பக்கத்தை Pஇல் $AP : PB = l : m$ எனும்படிப் பிரி. AP, ABக்கு AX என்ற பெருக்கிடை (Geometric mean) காணவும். X வழியே BCக்கு XYஐ இணையாக வரைந்து ACஐ Yல் வெட்டவும். இப்போது $\triangle AXY : XYCB = l : m$.

வரைமுறை காணலில் நிரூபணம் அடங்கியுள்ளது.

வரைதல் 5

ஒரு முக்கோணத்தின் ஒரு பக்கத்திற்குக் குத்துக் கோடு வரைந்து, முக்கோணத்தின் பரப்பை l : m என்ற விகிதத்தில் **பிரித்தல்.**

வரைமுறை காணல் △ ABCயில் BCக்குக் குத்தாக உள்ள XY, முக்கோணத்தை l : m என்ற விகிதத்தில் பிரிக்கட்டும். X என்ற புள்ளியைக் காண, அதாவது $\frac{\triangle BXY}{\triangle BAC} = \frac{l}{l+m}$,



△ BXYக்கு ஒத்தவடிவுடைய முக்கோணத்தை BCக்குச் செங்குத்தாக ADயை வரைந்து காணலாம். $\therefore$ △ BXY ||| △ BDA

$$\therefore \quad \frac{\triangle BXY}{\triangle BDA} = \frac{BX^2}{BD^2}; \quad \frac{\triangle BDA}{\triangle BAC} = \frac{BD}{BC}$$

$$\therefore \quad \frac{\triangle BXY}{\triangle BDA} \cdot \frac{\triangle BDA}{\triangle BAC} = \frac{BX^2}{BD^2} \cdot \frac{BD}{BC} = \frac{BX^2}{BD \cdot BC}$$

ஆனால் $\frac{\triangle BXY}{\triangle BAC} = \frac{l}{l+m} \quad \therefore \quad \frac{BX^2}{BD \cdot BC} = \frac{l}{l+m}$

$$\therefore \quad BX^2 = \frac{l}{l+m} \cdot BD \cdot BC$$

$\therefore$ BX என்பது $\frac{l \cdot Bc}{l+m}$, BD இவற்றிற்குப் பெருக்கிடை

ஆகவே BCயை Pல் $\frac{BP}{PC} = \frac{l}{m}$ எனப் பிரித்தால் BP, BDகளின் பெருக்கிடை BX · BX

இவ்வாறு Xஐக் காண்கிறோம்.

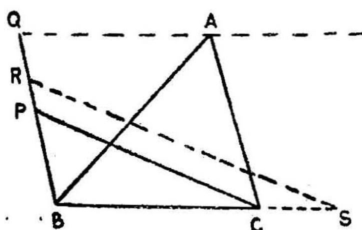
வரைதல் முறை : ஆகவே (i) Bcயை Pல் l : m என்ற விகிதத்தில் பிரி (ii) BP, BDகளுக்கு BX என்ற பெருக்கிடை வரைந்து காணவும். (இங்கு AD என்பது Bcக்கு Dல் செங்குத்துக் கோடு) (iii) X வழியே Bcக்குச் செங்குத்துக் கோடு வரைந்தால் முக்கோணத்தின் பரப்பு l:m என்ற விகிதத்தில் பிரிக்கப்படுகிறது.

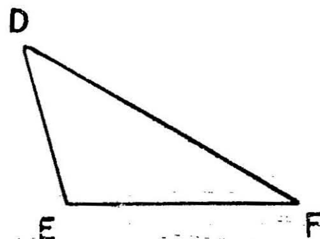
நிரூபணம் : 'வரைமுறைகாணலி'ல் அடங்கியுள்ளது.

வரைதல் 6

ஒரு குறிப்பிட்ட முக்கோணத்துடன் ஒத்த வடிவுடையதாகவும், மற்றொரு முக்கோணத்தின் பரப்புக்குச் சமமாகவும் இருக்கும்படி ஒரு முக்கோணம் வரைதல்.

△ ABCயின் பரப்புக்குச் சமமாகவும், △ DEF உடன் ஒத்த வடிவுடையதாகவும் ஒரு முக்கோணம் வரையவேண்டும்.





வரைதல் முறை (i) BC என்ற பக்கத்தின்மேல் △ DEF உடன் வடிவொத்ததாக இருக்கும்படி △ BPC யை வரை.

(ii) BCக்கு இணையாக A வழியே வரைந்த இணை கோடு BPயை அல்லது BPயின் நீட்சியை Qவில் வெட்டட்டும்.

(iii) BQ, BPக்கு BR என்ற பெருக்கிடை காண்க.

(iv) R வழியே PCக்கு இணை கோடு வரை. அது BCயை Sல் வெட்டட்டும்.

△ BRSதான் தேவையான முக்கோணம்.

நிருபணம்: RS ∥ PC ∴ △ BRS ||| △ BPC

ஆனல் △ BPC ||| △ DEF

∴ △ BRS ||| △ DEF

$$\therefore \frac{\triangle BRS}{\triangle BPC} = \frac{BR^2}{BP^2} = \frac{BP \cdot BQ}{BP^2} = \frac{BQ}{BP}$$

ஆனல் $\dfrac{\triangle BQC}{\triangle BPC} = \dfrac{BQ}{BP}$

$$\therefore \triangle BRS = \triangle BQC$$
$$= \triangle BAC$$

(ஏனெனில் △ BQC, △ BAC என்பவை BC என்ற பொதுப் பக்கத்தைக் கொண்டும், AQ, BC என்ற இணை கோடுகளில் அடங்கியும் உள்ளன)

பயிற்சி 9

1. ஒரு முக்கோணத்தின் பக்கங்கள் முறையே 4 செ. மீ.; 5 செ.மீ.; 7 செ.மீ. மிகப்பெரிய பக்கத்திற்கு இணைகோடு வரைந்து அதன் பரப்பை இரு சமபாகங்களாகப் பிரி.

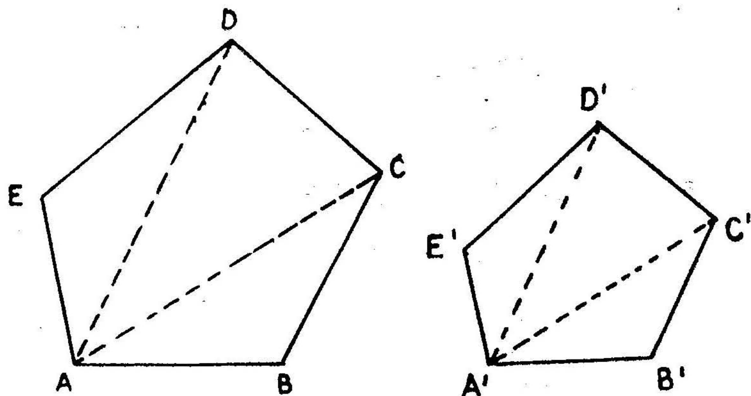
2. 2 அங்., 3 அங்., 4 அங். உள்ள ஒரு முக்கோணம் வரைந்து அதன் மிகச் சிறிய பக்கத்திற்கு இணை கோடுகள் வரைந்து முக்கோணத்தை மூன்று சம பரப்புடையனவாகப் பிரி.

3. ABCD என்ற இணைகரத்தில் AB=2·5 அங். AD=2 அங். AC=3·4 அங்.; ACக்கு இணை கோடுகள் வரைந்து அதை மூன்று சம பரப்புடையனவாகப் பிரி.

4. ABCயில் AB = 3 அங்.; BC = 4 அங்.; CA = 2 அங். BCயில் P என்ற புள்ளி வழியே ABக்கு PD என்ற இணை கோடு வரைந்து △ BAP = △ PCD என்னும்படி P என்ற புள்ளியைக் காணவும்.

5. △ ABCயில் a = 7 செ.மீ.; ∠ B = 70°; ∠ C = 52° BCக்குச் செங்குத்துக்கோடு வரைந்து முக்கோணத்தின் பரப்பை இரு சம பாகங்களாகப் பிரி.

தேற்றம் 12. இரண்டு வடிவொத்த பல கோணங்களின் பரப்புக்களின் விகிதம், அவைகளின் ஒத்த பக்கங்களின் வர்க்கங் களின் விகிதமாகும்.



கொள்கை : ABCDE, A′ B′ C′ D′ E′ என்பவை இருவடி வொத்த பல கோணங்கள்

அதாவது (i) $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'} = \frac{DE}{D'E'} = \frac{EA}{E'A'}$.

(ii) $\underline{|A} = \underline{|A'}$ $\underline{|B} = \underline{|B'}$ $\underline{|C} = \underline{|C'}$

$\underline{|D} = \underline{|D'}$ $\underline{|E} = \underline{|E'}$.

நிரூபிக்க : $\frac{\text{பரப்பு } ABCDE}{\text{பரப்பு } A'B'C'D'E'} = \frac{AB^2}{A'B'^2}$

வரைதல் : A C, A D. A′ C′, A′ D′ என்பவைகளைச் சேர்க்க.

நிரூபணம்: $\triangle ABC$, $\triangle A'B'C'$ இவற்றில்

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} \qquad \angle B = \angle B'$$

$\therefore$ இவை வடிவொத்த முக்கோணங்கள்.

$$\therefore \frac{AC}{A'C'} = \frac{AB}{A'B'} = \frac{CD}{C'D'}$$

$$\therefore \angle ACB = \angle A'C'B'$$

ஆனால் $\angle BCD = \angle B'C'D'$

$$\therefore \angle BCD - \angle ACB = \angle B'C'D' - \angle A'C'B'$$

$$\therefore \angle ACD = \angle A'C'D'$$

$$\therefore \triangle ACD \; |||^{e} \; \triangle A'C'D'$$

இதேபோல $\triangle ADE \; |||^{r} \; \triangle A'D'E'$

$$\therefore \frac{\triangle ABC}{\triangle A'B'C} = \frac{AB^2}{A'B'^2}$$

$$\frac{\triangle ACD}{\triangle A'C'D'} = \frac{CD^2}{C'D'^2} = \frac{AB^2}{A'B'^2}$$

இதேபோல $\dfrac{\triangle ADE}{\triangle A'D'E'} = \dfrac{AB^2}{A'B'^2}$

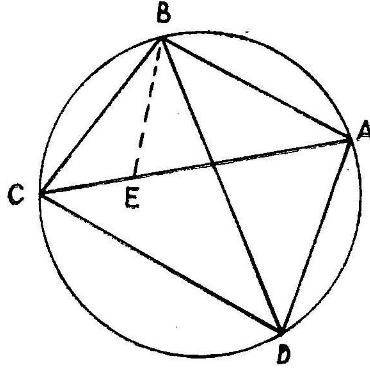
$$\therefore \frac{AB^2}{A'B'^2} = \frac{\triangle ABC}{\triangle A'B'C'} = \frac{\triangle ACD}{\triangle A'C'D'} = \frac{\triangle ADE}{\triangle A'D'E'}$$

$$\therefore \frac{AB^2}{A'B'^2} = \frac{\triangle ABC + \triangle ACD + \triangle ADE}{\triangle A'B'C' + \triangle A'C'D' + \triangle A'D'E'}$$

$$= \frac{\text{பரப்பு } ABCDE}{\text{பரப்பு } A'B'C'D'E'}$$

$$\therefore \frac{\text{பரப்பு } ABCDE}{\text{பரப்பு } A'B'C'D'E'} = \frac{AB^2}{A'B'^2}.$$

தேற்றம் 13. (Ptolemy's Theorem). ஒரு வட்ட நாற்கரத்தில் மூலைக்கோடுகள் உள்ளடக்கும் செவ்வகம், அதன் எதிர்ப் பக்கங்கள் அடக்கும் செவ்வகங்களின் கூடுதலாகும்.



கொள்கை: ABCD என்பது ஒரு வட்ட நாற்கரம்.

நிரூபிக்க: ACBD = AB · CD + AD · BC

வரைதல்: AC, BDஐ ஒன்று சேர் $\angle$CBE = $\angle$ABD எனும்படி BE வரைக. அது ACஐ Eல் வெட்டட்டும்.

நிரூபணம்: ABD, EBC என்ற முக்கோணங்களில்

$\angle$ABD = $\angle$EBC (வரைதல்)

$\angle$ADB = $\angle$ACB (ஒரே வில் தாங்கும் கோணங்கள்)

$\therefore$ $\triangle$ ABD ||| $\triangle$ EBC

$\therefore$ $\dfrac{AD}{EC} = \dfrac{BD}{BC}$ $\quad\therefore$ AD · BC = BD · EC (1)

$\triangle$ ABE, BDC என்ற முக்கோணங்களில்

ABE = DBC

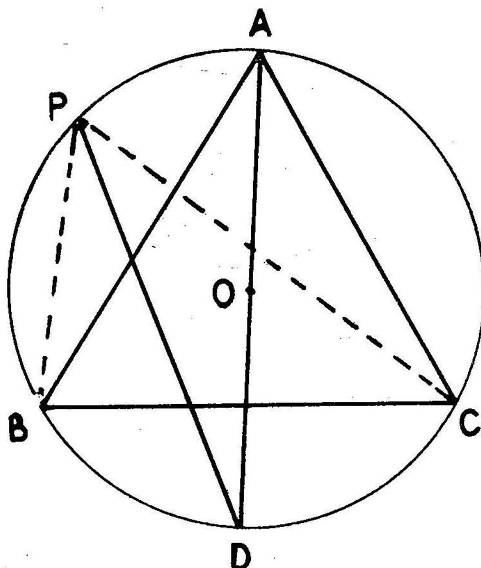
EAB = CDB

$\triangle$ BAE ||| BDC

$\therefore$ $\dfrac{BA}{BD} = \dfrac{AE}{DC}$ $\quad\therefore$ AB · CD = BD · AE (2)

$$(1)+(2) \quad \therefore \ AB \cdot CD + AD \cdot BC = BD\,(AE+EC)$$
$$= BD \cdot AC$$
$$\therefore \ AC \cdot BD = AB \cdot CD + AD \cdot BC.$$

மாதிரி: ஒரு வட்டத்தில் ABC என்ற இரு சமபக்க முக்கோணம் (AB = AC) வரையப்படுகிறது. வட்டமையம் O எனில் AO, வட்டத்தை Dயில் வெட்டுகிறது.



A என்ற முனையுள்ள வட்டவில் BCயில் P ஒரு புள்ளி என்றால் (BP + CP) AO = AC · PD எனக் காட்டு.

நிரூபணம்: வட்ட நாற்கரம் APBDயில்

$$AB \cdot PD = AD \cdot PB + AP \cdot BD \qquad (i)$$

வட்ட நாற்கரம் APDCயில்

$$AD \cdot PC = AC \cdot PD + AP \cdot CD$$
$$\therefore \ AD \cdot PC = AC \cdot PD + AP \cdot BD \ (\because BD = CD) \qquad (ii)$$
$$(i) - (ii) \quad AB \cdot PD - AD \cdot PC = AD \cdot PB - AC \cdot PD$$
$$= AD \cdot PB - AB \cdot PD$$
$$\therefore \ 2\,AB \cdot PD = AD\,(PB + PC)$$

ஆனால் $AB = AC; \quad AD = 2\,AO.$

$$\therefore \ AC \cdot PD = AO\,(BP + CP)$$

பயிற்சி 10

1. ABC என்பது ஒரு சமபக்க முக்கோணம். அதன் சுற்று வட்டத்தில் BC என்ற சிறு வில்லில் P என்பது ஒரு புள்ளி என்ருல் PA = PB + PC என நிறுவுக.

2. ABCD என்பது ஒரு வட்ட நாற்கரம். AE என்பது BDக்கு இணையாகவுள்ள நாண் என்ருல் AB · BC + AD · BC = BD · CE என நிரூபி. (58 M.U.)

3. AD ஒரு வட்டத்தின் விட்டம். BC அதற்குக் குத்தாக வுள்ள நாண், AB என்ற வில்லில் P ஒரு புள்ளியானுல் 2 PD · AB = (PB + PC) AD எனக் காட்டு. (54 · M.U.)

4. ABCD என்ற வட்ட நாற்கரத்தில் AD, ABக்கு இணையாக CM, CN எனும் கோடுகள் முறையே வரையப்படுகின்றன. அவை AB, CDஐ M, N எனும் புள்ளிகளில் முறையே வெட்டினுல் AB · AM + AD · AN = AC^2 என நிறுவுக.

5. A, BCD என்ற வட்ட நாற்கரத்தில் BD, ACஐ சமமாக வெட்டினுல் AD · AB = CD · CB என நிறுவுக.

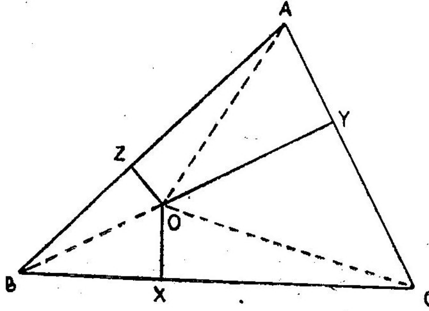
6. ABC என்ற முக்கோணத்தில் BC என்ற பக்கத்தின் பேரில் Aக்கு எதிர்ப்புறமாக BCD எனும் சமபக்க முக்கோணம் வரையப்படுகிறது. AD, எனும் கோடு வட்டம் BCDஐ Pயில் வெட்டினுல் AD = AP + BP + CP எனக் காட்டு.

7. ABCD என்ற நாற்கரம் வட்ட நாற்கரம் அல்லையாயின் AD · CB + AB · CD > AC · DB என நிறுவுக.

2. ஒருபுள்ளிவழிக் கோடுகளும் ஒருகோட்டில் அமையும் புள்ளிகளும்

(Concurrency and Collinearity)

தேற்றம் 14 (a) ABC என்ற முக்கோணத்தில் BC, CA, AB என்ற பக்கங்களுக்கு X_1 Y_1 Z என்ற புள்ளிகளில் வரையப் படும் குத்துக்கோடுகள் ஒரு புள்ளியில் சந்தித்தால் $BX^2 + CY^2 + AZ^2 = CX^2 + AY^2 + BZ^2$.



குத்துக் கோடுகள் Oவில் சந்திக்கட்டும்.

வரைதல்: AO, BO, COஐச் சேர்.

$$\underline{BXO} = 90^\circ \quad \underline{|CXO} = 90^\circ$$

$$\therefore \quad BX^2 = BO^2 - OX^2$$

$$CX^2 = CO^2 - OX^2$$

$$\therefore \quad BX^2 - XC^2 = BO^2 - CO^2$$

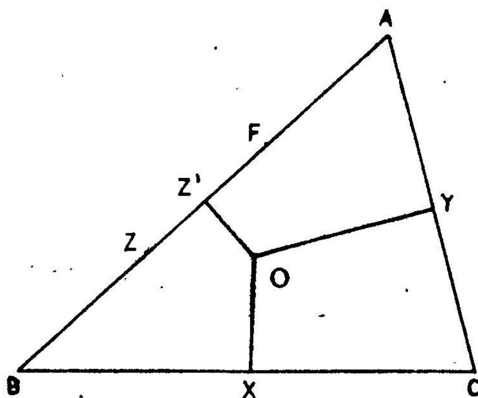
இதேபோல $CY - YA^2 = CO^2 - AO^2$

$$AZ^2 - ZB^2 = AO^2 - BO^2$$

$$\therefore \quad (BX^2 - XC^2) + (CY^2 - YA^2) + (AZ^2 - ZB^2) = O$$

$$\therefore \quad BX^2 + CY^2 + AZ^2 = CX^2 + AY^2 + BZ^2$$

தேற்றம் 14 (b) (தேற்றம் 14 (a)இன் மறுதலை)
ABC என்ற முக்கோணத்தின் பக்கங்களாகிய BC, CA, AB என்பவற்றில் X, Y, Z எனும் புள்ளிகள் $BX^2 + CY^2 + AZ^2 = CX^2 + AY^2 + BZ^2$ எனும்படி அமைந்தால், அப்புள்ளிகளில் பக்கங்களுக்கு வரையப்படும் குத்துக்கோடுகள் ஒரு புள்ளி வழிக் கோடுகளாகும்.



வரைதல் : BCக்கு XO எனும் குத்துக்கோடும் CAக்கு YO எனும் குத்துக்கோடும் வரைக. அவை Oவில் வெட்டட்டும். OZ ஆனது ABக்கு நேர்குத்தாக இராவிட்டால் Oவிலிருந்து ABக்கு OZ' எனும் குத்துக்கோடு வரைக.

நிருபிக்க : Z' எனும் புள்ளியும் Z எனும் புள்ளியும் ஒன்றே என நிருபிக்க.

நிருபணம் : முந்திய தேற்றப்படி $BX^2 + CY^2 + AZ'^2 = CX^2 + AY^2 + BZ'^2$

ஆனல் கொள்கைப்படி $BX^2 + CY^2 + AZ^2 = CX^2 + AY^2 + BZ^2$

$$\therefore \; AZ'^2 - AZ^2 = BZ'^2 - BZ^2$$

$$\therefore \; AZ'^2 - BZ'^2 = AZ^2 - BZ^2$$

$$\therefore \; (AZ' + Z'B)(AZ' - Z'B) = (AZ + ZB)(AZ - ZB)$$

$$AB \cdot 2FZ' = AB \cdot 2FZ$$

(F என்பது ABயின் நடுப்புள்ளி.)

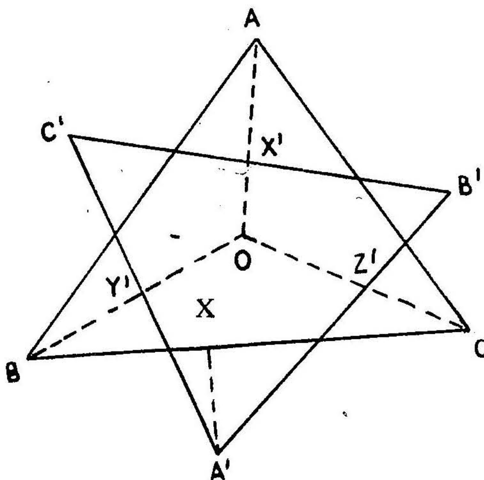
$$\therefore \; FZ' = FZ$$

$\therefore$ Z', Z; இரண்டும் ஒரே புள்ளிகள்

ς

∴ Zல் வரையப்படும் குத்துக்கோடும் (அதாவது ZO) O வழிச் செல்கிறது.

(எ-டு) ABC என்ற முக்கோணத்தின் முனைகளிலிருந்து B′C′, C′A′, A′B′ எனும் A′B′C′ முக்கோணத்தின் பக்கங்களுக்கு வரையப்படும் குத்துக்கோடுகள் ஒரு புள்ளியில் சந்தித்தால், A′B′C′யிலிருந்து BC, CA, ABக்கு வரையப்படும் குத்துக் கோடுகளும் ஒரு புள்ளியில் சந்திக்கும் எனக் காட்டு.



AX′ ⊥ B′C′ ; BY′ ⊥ C′A′ ; CZ′ ⊥ A′Z′ இவை ஒரு புள்ளிவழிக் கோடுகள்.

∴ $\sum(B'X'^2 - X'C'^2) = O$ (1)

(i) $A'X \perp BC$, $B'Y \perp CA$; $C'Z \perp AB$ வரைக.

(படத்தில் A′X மட்டுமே காட்டப்பட்டுள்ளது)

$$\begin{aligned} BX^2 - XC^2 &= (BA'^2 - A'X^2) - (CA'^2 - A'X^2) \\ &= (BA'^2 - CA'^2) \\ &= (BY'^2 + Y'A'^2) - (CZ'^2 + Z'A'^2) \end{aligned}$$

$$\therefore \quad BX^2 - XC^2 = (BY'^2 - CZ'^2) + (Y'B'^2 - Z'A'^2)$$

இதேபோல

$$CY^2 - YZ^2 = (CZ'^2 - AX'^2) + (Z'B'^2 - X'B'^2)$$
$$AZ^2 - ZB^2 = (AX'^2 - BY'^2) + (X'C'^2 - Y'C'^2)$$

$\therefore \quad \sum (BX^2 - XC^2) = O \qquad \sum (B'X'^2 - X'C'^2) = O$

$\therefore$ X_1 Y_1 Z எனும் இடங்களில் BC, CA, ABக்கு வரையப் படும் குத்துக் கோடுகள், AX_1 BY_1 CZ ஒரு புள்ளிவழிக்கோடு களாகும்.

பயிற்சி 11

1. ஒரு முக்கோணத்தின் *(i)* குத்துயரக்கோடுகள் *(ii)* பக்கங்களின் மையக்குத்துக்கோடுகள் ஒரு புள்ளிவழிக் கோடு களாகும்.

2. மூன்று வட்டங்கள் ஒன்றையொன்று வெட்டிக்கொண் டால், அவற்றின் பொது நாண்கள் ஒரு புள்ளிவழிக் கோடுகள் எனக் காட்டு.

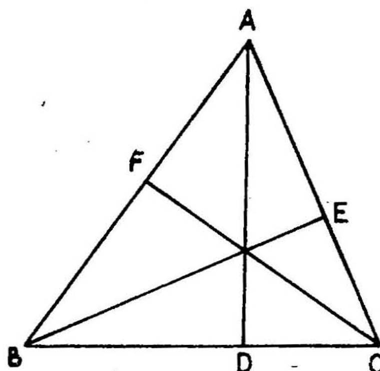
3. AD, BE, CF என்பவை ABC என்ற முக்கோணத்தின் குத்துயரக் கோடுகள் A, B, C என்ற முனைகளிலிருந்து EF, FD, DE எனும் கோடுகளுக்கு வரையப்படும் குத்துக்கோடுகள் ஒரு புள்ளிவழிக் கோடுகள் எனக் காட்டு: அந்தப் புள்ளி ABCயின் சுற்றுவட்ட மையம் எனவும் காட்டு.

4. ஒரு முக்கோணத்தின் வெளித்தொடு வட்டங்கள் பக்கங் களைத் தொடும் புள்ளிகளில் பக்கங்களுக்கு வரையப்படும் குத்துக் கோடுகள் ஒரு புள்ளி வழிக்கோடுகளெனக் காட்டு.

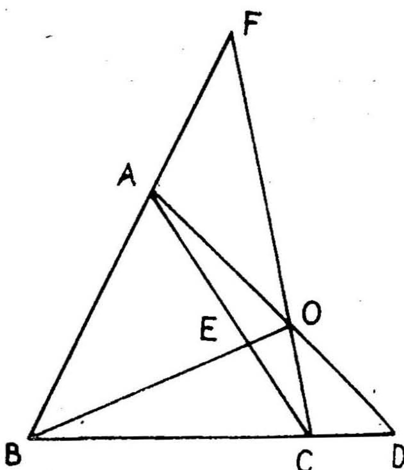
5. KL, KM, KN என்பவை முறையே BC, CA, ABக்குக் குத்துக்கோடுகள். A, B, Cயிலிருந்து MN, NL, LMக்கு வரையப்படும் குத்துக்கோடுகள் ஒரு புள்ளி வழிக் கோடுகளெனக் காட்டு.

6. A, B, C என்ற புள்ளிகளிலிருந்து ஒரு கோட்டிற்கு AX, BY, CZ எனும் குத்துக்கோடுகள் வரையப்படுகின்றன. BC, CA, ABக்கு X, Y, Zஇலிருந்து வரையப்படும் குத்துக் கோடுகள் ஒரு புள்ளி வழிக் கோடுகளெனக் காட்டு.

தேற்றம் 15: *(சேவாவின் தேற்றம்)* (Cevas' Theorem). முக்கோணம் ABCயில் AO, BO, CO எனும் ஒரு புள்ளி வழிக் கோடுகள் எதிர்ப்பக்கங்கள் BC, CA, ABஐ முறையே D, E, Fல் வெட்டினால் $\frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{AF}{FB} = +1$ ஆகும்.



படம் (i)



படம் (ii)

நிரூபணம் : $\triangle$ BOD, DOC இவையிரண்டும் Oவிலிருந்து ஒரே குத்துயரக் கோடுடையவை

$$\therefore \quad \frac{\triangle BOD}{\triangle DOC} = \frac{BD}{DC}; \quad \text{இதேபோல} \quad \frac{\triangle BAD}{\triangle DAC} = \frac{BD}{DC}$$

$$\therefore \quad \frac{BD}{DC} = \frac{\triangle BAD}{\triangle DAC} = \frac{\triangle BOD}{\triangle DOC} = \frac{\triangle BAD - \triangle BOD}{\triangle DAC - \triangle DOC} = \frac{\triangle BAO}{\triangle OAC}$$

$$\therefore \quad \frac{BD}{DC} = \frac{\triangle BAO}{\triangle OAC}$$

$$\text{இதேபோல} \quad \frac{CE}{EA} = \frac{\triangle CBO}{\triangle OBA}; \quad \frac{AF}{FB} = \frac{\triangle ACO}{\triangle OCB}$$

$$\therefore \quad \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{AF}{FB} = 1 \quad (\text{அளவில்})$$

படம் (i)ல் மூன்று விகிதங்களும் நேரெண்களாகும்.

படம் (ii)ல் இரண்டு விகிதங்கள் எதிரெண்கள். ஒரு விகிதம் நேரெண் $\therefore$ இரண்டிலும் பெருக்கற்பலன் நேரெண்ணாகும்.

$$\therefore \quad \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{AF}{FB} = +1$$

தேற்றம் 15-(a) (மறுதலை) முக்கோணம் ABC யின் பக்கங்களாகிய BC, CA, AB யில் D, E, F, எனும் புள்ளிகள் $\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}\cdot\frac{AF}{FB} = +1$ எனும்படி அமைந்தால் AD, BE, CF எனும் கோடுகள் ஒரு புள்ளி வழிக்கோடுகளாகும்.

நிரூபணம் : AD, BE என்ற கோடுகள், O வில் வெட்டட்டும்; CO ஐச் சேர்க்கவும் CO, AB, Fல் சந்திக்காவிடில் F′ இல் வெட்டட்டும். AD, BE, CF′ ஒரு புள்ளி வழிக்கோடுகளாகும்.

$$\therefore \quad \frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}\cdot\frac{AF'}{F'B} = +1$$

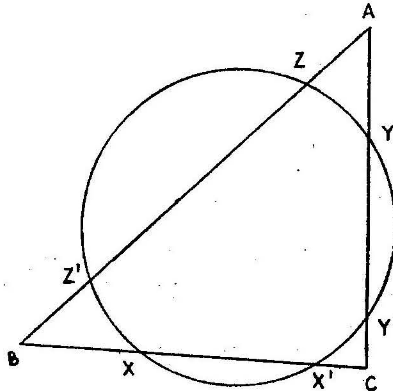
ஆனால் $$\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}\cdot\frac{AF}{FB} = +1 \quad (\text{கொள்கை})$$

$$\therefore \quad \frac{AF}{FB} = \frac{AF'}{F'B}$$

∴ F, F′ என்பவை ஒரே புள்ளியே

∴ CF என்ற கோடும் AD, BE, வெட்டும் புள்ளியாகிய O வழிச் செல்கிறது.

மாதிரி : ஒரு வட்டம் முக்கோணம் ABCயின் பக்கங்களாகிய. BC, CA, ABஐ X, X′ Y, Y′ Z, Z′ இல் வெட்டுகிறது. AX, BY, CZ ஒரு புள்ளியில் சந்தித்தால், AX′, BY′, CZ′ ஒரு புள்ளியில் சந்திக்கும் எனக்காட்டு.



AX BY, CZ ஒரு புள்ளிவழிக் கோடுகள்

$$\therefore \frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{YA} \cdot \frac{AZ}{ZB} = +1 \qquad (1)$$

ஆனால் $BX \cdot BX' = BZ \cdot BZ'$

$$\therefore \frac{BX}{BZ} = \frac{BZ'}{BX'}$$

இதேபோல $\frac{CY}{CX} = \frac{CX'}{CY'}$

$$\frac{AZ}{AY} = \frac{AY'}{AZ'}$$

$$\therefore \frac{BX}{BZ} \cdot \frac{CY}{CX} \cdot \frac{AZ}{AY} = \frac{BZ'}{BX'} \cdot \frac{CX'}{CY'} \cdot \frac{AY'}{AZ'}$$ (1) லிருந்து

ஆனால் $\frac{BX}{BZ} \cdot \frac{CY}{CX} \cdot \frac{AZ}{AY} = +1$

$$\therefore \frac{BZ'}{BX'} \cdot \frac{CX'}{CY'} \cdot \frac{AY'}{AZ'} = +1$$

$$\therefore \frac{BX'}{X'C} \cdot \frac{CY'}{Y'A} \cdot \frac{AZ'}{Z'B} = +1$$

$\therefore$ AX′, BY′, CZ′ ஒரு புள்ளி வழிக் கோடுகளாகும்.

பயிற்சி 28

1. ஒரு முக்கோணத்தின் வெளித் தொடுவட்டங்கள், பக்கங்களைத் தொடும் புள்ளிகளை, முனைகளுடன் சேர்க்கும் கோடுகள், ஒரு புள்ளி வழிக் கோடுகள் எனக்காட்டு.

2. ABC என்ற முக்கோணத்தின் பக்கங்களின் மேல் வடிவொத்த இரு சமபக்க முக்கோணங்கள் LBC, MCA, NAB, வரைந்தால் AL, BM, CN எனும் கோடுகள் ஒரு புள்ளி வழிச் செல்பவையாகும்.

3. ஒரு வட்டம், ABC என்ற முக்கோணத்தின் பக்கங்கள் BC, CA, AB ஐ முறையே D, D′; E, E′ F, F′; என்ற புள்ளிகளில் வெட்டுகின்றன. AD, BE, CF என்பவை ஒரு புள்ளி வழிக்கோடுகளானால் AD′, BE′, CF′ எனும் கோடுகளும் அவ்வாறே என நிறுவுக.

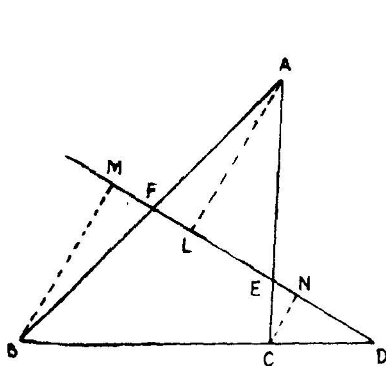
4. AD, BE, CF எனும் ஒரு புள்ளி வழிக்கோடுகள் BC, CA, AB ஐ D, E, Fல் வெட்டுகின்றன. P, Q, R என்பவை EF, FD, DE என்பவற்றின் மையப் புள்ளிகளானால் AP, BQ, CR, ஒரு புள்ளி வழிச் செல்கின்றன எனக் காட்டு.

5. மேற் கணக்கில், AD, BE, CF எனும் கோடுகளுக்கு BC, CA, AB எனும் பக்கங்களின் மையப் புள்ளிகள் வழி வரையப்படும் இணைகோடுகள் ஒரு புள்ளி வழிக் கோடுகளாகும் எனநிறுவுக.

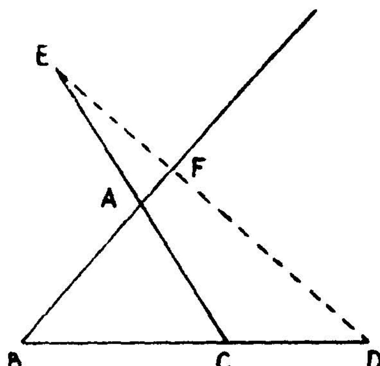
தேற்றம் 16 (Menelaus Theorem) (மெனிலாசின் தேற்றம்) ABC என்ற முக்கோணத்தின் பக்கங்களாகிய BC, CA, AB இவற்றை ஒரு குறுக்கு வெட்டி D, E, F ல் வெட்டினால்

$$\frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{AF}{FB} = -1$$

அல்லது $BD \cdot CE \cdot AF = BF \cdot AE \cdot CD$



படம் (i)



படம் (ii)

வரைதல்: A, B, C, யிலிருந்து குறுக்கு வெட்டிக்கு AL, BM CN எனும் குத்துக் கோடுகள் வரைக.

நிருபணம்: $\triangle BDF ||| \triangle CDN$

$$\therefore \frac{BD}{DC} = \frac{BM}{CN}$$

இதேபோல $$\frac{CE}{EA} = \frac{CN}{AL}$$

$$\frac{AF}{FB} = \frac{AL}{BM}$$

$$\therefore \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{AF}{FB} = 1 \qquad \text{(அளவில்)}$$

படம் (i)ல் இரண்டு பக்கங்களை உள்ளீடாகவும் ஒரு பக்கத்தை புறம்பாகவும் வெட்டுவதால், இரண்டு விகிதங்கள் நேரெண்ணாகவும் ஒன்று எதிரெண்ணாகவும் ஆகிறது. ஆகவே பெருக்கற்பலன் எதிரெண்ணாகும்.

படம் (ii)ல் மூன்றும் எதிரெண். ஆகவே பெருக்கற் பலன் எதிரெண்ணாகும்.

ஆகவே பெருக்கற் பலன் எதிரெண்ணாகும்.

$$\therefore \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{AF}{FB} = -1$$

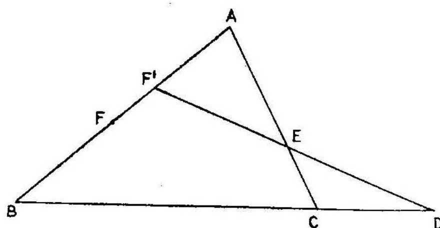
[இதை $BD \cdot CE \cdot AF = -(DC \cdot EA \ FB)$

ஆனால் $DC = -CD$; $EA = -AE$; $FB = -BF$

$\therefore$ $DC \ EA \cdot FB = -CD \cdot AE \cdot BF$

$\therefore$ $BD \ CE \cdot AF = BF \cdot AE \cdot CD$ இவ்வாறும் முடிவைக் கூறுவது வழக்கம்].

தேற்றம் 16 (a) (மறுதலை) ABC என்ற முக்கோணத்தின் பக்கங்கள் BC, CA, AB இவற்றில் D, E, F எனும் புள்ளிகள் $\frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{AF}{FB} = -$ எனும்படி அமைந்தால் அம்மூன்று புள்ளிகளும் ஒரு கோட்டில் அமையும் புள்ளிகளாகும்.



வரைதல் : D, E எனும் புள்ளிகளைச் சேர்க்கும் நேர்கோடு AB ஐ F' ல் வெட்டட்டும்.

நிரூபணம் : DEF' குறுக்கு வெட்டியாதலால்

$$\frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{AF'}{F'B} = -1$$

ஆனால், $\frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{AF}{FB} = -1$ (கொள்கை)

$\therefore \quad \frac{AF'}{F'B} = \frac{AF}{FB}$

ஆனால் ABஐ ஒரு விகிதத்தில் ஒரே புள்ளியில்தான் பிரிக்க முடியும்-

$\therefore$ F', F என்பவை வெவ்வேறு புள்ளிகளல்ல, ஒரே புள்ளியே அதாவது DE, F வழிச் செல்கிறது. D, E, F ஒரு கோட்டில் அமையும் புள்ளிகளாகும்.

பயிற்சி 13

1. தேற்றத்தின் படத்தில் BC = 2 CD, CA = 3 CE என்றால் AF : FBயின் மதிப்பைக் கணக்கிடு.

2. Y, Z என்பவை AC, ABயின் மையப் புள்ளிகள். Q என்பது YZ என மையப் புள்ளி. BQ ACஐ Rல் வெட்டுகிறது. AR : RCஇன் மதிப்பு என்ன?

3. ABC என்ற முக்கோணத்தினுள் P என்பது ஒரு புள்ளி APB, BPC, CPA, என்ற கோணங்களின் சமவெட்டி AB, BC, CA எனும் பக்கங்களை மூன்று ஒருகோட்டமையும் புள்ளிகளில் வெட்டுகின்றன எனக் காட்டு.

4. ஒரு முக்கோணத்தின் கோணங்களின் வெளிச் சம வெட்டிகள், எதிர்ப்பக்கங்களைச் சந்திக்கும் புள்ளிகள் ஒரு கோட்டமைவன எனக் காட்டு.

5. ABC என்ற முக்கோணத்தின் சுற்றுவட்டத்திற்கு முனைகளில் வரையப்படும் தொடுகோடுகள் எதிர்ப்பக்கங்களை ஒரு கோட்டமையும் புள்ளிகளில் வெட்டுகின்றன எனக் காட்டு.

6. ஒரு முக்கோணத்தின் முனைகளிலிருந்து ஏதேனும் ஒரு வட்டத்திற்கு வரையப்படும் தொடு கோடுகள், எதிர்ப்பக்கங்களை XX'; YY'; ZZ'; எனும் புள்ளிகளில் வெட்டுகின்றன. X, Y, Z என்பவை ஒரு கோட்டமையும் புள்ளிகளானால் X' Y' Z' என்பவையும் அவ்வாறே எனக் காட்டு.

7. ஒரு முக்கோணத்தின் கோணங்களில் ஏதேனும் இரண்டு உள் சமவெட்டிகளும், மற்றக் கோணத்தின் வெளிச் சமவெட்டியும், எதிர்ப்பக்கங்களை ஒரு கோட்டமையும் புள்ளிகளில் வெட்டு கின்றன என நிலை நாட்டு.

(சேவா, மெனிலாஸ் எனும் இரு தேற்றங்களும் பயன்படும் கணக்குகள்).

8. ABC என்ற முக்கோணத்தில் DEF என்பது அடி முக் கோணம் (Pedal triangle) இதன் பக்கங்கள் EF, FD, DE முறையே BC, CA, ABஐ X, Y, Z எனும் புள்ளிகளில் வெட்டுகின்றன. X, Y, Z ஒரு கோட்டமையும் புள்ளிகளெனக் காட்டு.

9. AD, BE, CF என்பவை ABC என்ற முக்கோணத்தில் ஒரு புள்ளி வழிக் கோடுகள் EF, FD, DE பக்கங்கள் BC, CA, ABஐ D′, E′, F′ எனும் புள்ளிகளில் வெட்டுகின்றன. BCஐ D, D′ எனும் புள்ளிகள் ஒரே விகிதத்தில் உள்ளாகவும் புறம்பாகவும் பிரிக் கின்றன எனக் காட்டு. D′, E′, F′, என்பவை ஒரு கோட் டமையும் புள்ளிகளெனவும் காட்டு.

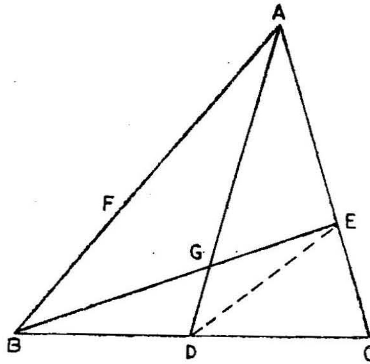
10. ABC, A′ B′ C′ என்ற இரு முக்கோணங்களில் AA′; BB′; CC′ என்பவை O வழிச் செல்கின்றன. BC, B′C′; CA, C′A′; AB, A′ B′ என்பவை L, M, N, எனும் புள்ளிகளில் வெட்டுகின்றன. L, M, N ஒரு கோட்டமையும் புள்ளிகளெனக் காட்டு.

[குறிப்பு: LB′ C′; MC′ A′; NA′ B′ என்பவை OBC, OCA, OAB என்ற முக்கோணங்களின் குறுக்குவெட்டிகள் என்பதி லிருந்து விடை காணவும்].

11. ABCDEF என்பது ஒரு அறுகோணம் AB, DE; BC, EF; CD, FA; எனும் பக்கங்கள் L, M, N எனும் புள்ளிகளில் வெட்டு கின்றன LMN என்பது ஒரு நேர் கோடெனக் காட்டுக (பாஸ்கல் தேற்றம்).

3. முக்கோணத்தின் பண்புகள்

தேற்றம் 17. *(i)* ஒரு முக்கோணத்தின் மையக் கோடுகள் ஒரு புள்ளியில் சந்திக்கின்றன. *(ii)* அந்தப் புள்ளி ஒவ்வொரு மையக் கோட்டையும் முச்சமக் கூறிடும் புள்ளிகள் இரண்டனுள் ஒன்ருகும்.



கொள்கை : ABC என்ற முக்கோணத்தில் AD, BE, CF என்பவை மையக் கோடுகள் அதாவது BC, CA, ABஇன் மையப் புள்ளிகள் D, E, F ஆகும்.

நிரூபிக்க : AD, BE, CF ஒரே புள்ளியில் சந்திக்கின்றன என.

வரைதல் : AD, BE, Gல் வெட்டட்டும் DEஐச் சேர்க்க

நிரூபணம் : BD = DC CE = EA

∴ DE ∥ AB DE = $\frac{1}{2}$ AB

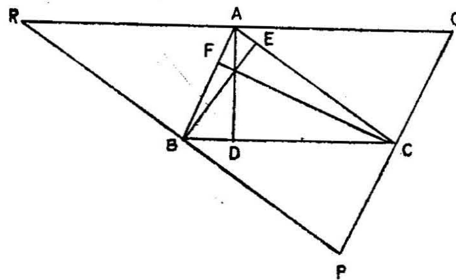
∴ △ ABG ||| DEG

$$\therefore \quad \frac{AG}{GD} = \frac{AB}{DE} = \frac{2}{1} = \frac{BG}{GE}$$

(*i*) ADஐ முச்சமக் கூறிடும் புள்ளிகளில் ஒன்ருக G எனும் புள்ளி உள்ளது. இதன் வழி மையக் கோடு BE செல்கிறது இதேபோல மையக்கோடு CF இதே புள்ளி வழிச் செல்கிறதெனக் காட்டலாம். ஆகவே (1) மூன்று மையக் கோடுகளும் G வழிச் செல்கின்றன (2) G மூன்று மையக் கோடுகளையும் முனைகளி லிருந்து 2 : 1 என்ற விகிதத்தில் பிரிக்கின்றன.

குறிப்பு: இந்தப் புள்ளி '*மையக் கோட்டுச் சந்தி*' (Centroid) எனப்படும். 'G' எனும் எழுத்தால் குறிக்கப்படும்.

தேற்றம் 18 ஒரு முக்கோணத்தின் குத்துயரக் கோடுகள் ஒரு புள்ளியில் சந்திக்கின்றன.



கொள்கை: A B C என்பது முக்கோணம் A D, B E, C F என்பவை B C, C A, A B க்குக் குத்துக் கோடுகள்.

நிரூபிக்க: A D, B E, C F என்பவை ஒரு புள்ளிவழிக் கோடுகள் என.

வரைதல்: முனைகள் A, B, C வழி எதிர்ப்பக்கங்கள் BC, CA, AB இணையாக QR, RP, PQ எனும் கோடுகள் வரைக.

நிரூபணம்: B C A R ஒரு இணைகரம்

$\therefore$ R A = B C;

C B A Q ஒரு இணைகரம்

$\therefore$ A Q = B C

∴ A என்பது R Q வின் நடுப்புள்ளி

∴ A D என்பது R Q இன் மையக் குத்துக்கோடு

இதேபோல B E என்பது P R இன் மையக் குத்துக்கோடு

C F என்பது Q P யின் மையக் குத்துக்கோடு

∴ A D, B E, C F எனும் கோடுகள் ஒரு புள்ளியில் (Oவில்) சந்திக்கின்றன.

(O என்பது △ PQR இன் சுற்றுவட்ட மையம்)

குறிப்பு: A D, B E, C F என்பவை குத்துயரக் கோடுகள் எனவும் O எனும் புள்ளி முக்கோணம் A B C யின் குத்துமையம் (Ortho Centre) எனவும் பெயர்பெறும்.

மாற்று நிருபணம்:

$$BD^2 - DC^2 = (BA^2 - AD^2) - (CA^2 - AD^2)$$

$$\therefore \quad BD^2 - DC^2 = BA^2 - CA^2$$

இதேபோல $CE^2 - EA^2 = CB^2 - AB^2$

$$AF^2 - FB^2 = AC^2 - BC^2$$

$$\therefore \quad (BD^2 - DC^2) + (CE^2 - EA^2) + (AF^2 - FB^2) = O$$

∴ முக்கோணத்தின் பக்கங்களுக்கு D, E, F, எனும் புள்ளிகளில் உள்ள குத்துயரக் கோடுகள் AD, BE, CF ஒரு புள்ளியில் சந்திக்கின்றன.

பயிற்சி 14

1. A B C என்ற முக்கோணத்தில் O என்பது குத்துமையமானால் $OA \cdot OD = OB \cdot OE = OC \cdot OF$ எனக் காட்டு (AD, BE, CF குத்துயரக் கோடுகள்)

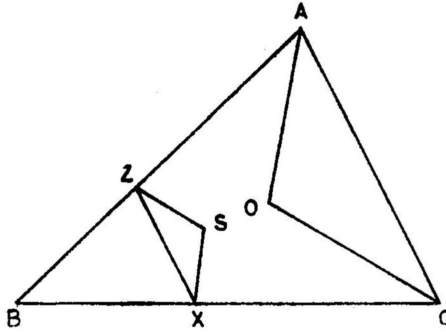
2. DEF எனும் அடி முக்கோணத்தின் (Pedal triangle) உள்வட்ட மையம் O எனவும், A, B, C என்பவை வெளித் தொடுவட்ட மையங்கள் எனவும் காட்டு.

3. ABC என்ற முக்கோணத்தின் குத்துமையம் O ஆனால் A என்பது OBCயின் குத்துமையம் எனக் காட்டு.

4. சுற்றுவட்டம் A B Cக்கு A, B, C என்ற முனைகளில் வரையப்படும் தொடு கோடுகள் அடி முக்கோணத்தின் பக்கங்களுக்கு இணை கோடுகள் எனக் காட்டு; அதிலிருந்து, A, B, Cயிலிருந்து அடி முக்கோணத்தின் பக்கங்களுக்கு வரையப்படும் குத்துக் கோடுகள் A B Cயின் சுற்று வட்ட மையத்தில் சந்திக்கின்றன என நிறுவுக.

5. ஒரு புள்ளிவழி மூன்று சம வட்டங்கள் வரையப்படுகின்றன. அவை வெட்டிக் கொள்ளும் மற்ற மூன்று புள்ளிகளாலான முக்கோணத்திற்கு இந்தப் புள்ளி குத்து மையம் என நிறுவு.

தேற்றம் 18 (a) ஒரு முக்கோணத்தில் ஒரு முனையிலிருந்து குத்துமையத்தின் தூரமானது, எதிர்ப் பக்கத்திலிருந்து சுற்றுவட்ட மையத்தின் தூரத்தைப்போல் இரண்டு மடங்காகும்.



கொள்கை: A B C என்பது முக்கோணம்; S சுற்றுவட்ட மையம்; O குத்து மையம்; SX, SY, SZ பக்கங்கள்; BC, CA, ABக் குத்துக் கோடுகள்.

நிரூபிக்க: AO = 2SX BO = 2SY CO = 2SZ.

வரைதல்: XZஐ ஒன்று சேர்க்கவும்.

நிரூபணம்: X, Y, Z என்பவை BC, CA, ABயின் நடுப் புள்ளிகள் ∴ XZ ∥ CA; XZ=$\frac{1}{2}$CA

முக்கோணங்கள் AOC, XSZல் AO ∥ SX; CO ∥ SZ; AB ∥ XZ

∴ △ AOC ||| △ XSZ

$$\therefore \quad \frac{AO}{XS} = \frac{OC}{SZ} = \frac{AC}{XZ} = \frac{2}{1}$$

$$\therefore \quad AO = 2XS$$

$$CO = 2ZS$$

இதேபோல $BO = 2YS$ எனவும் காட்டலாம்

தேற்றம் 18 (b) ஒரு முக்கோணத்தில் (i) சுற்றுவட்ட மையம், மையக் கோட்டுச் சந்தி, குத்து மையம் ஆகிய மூன்று புள்ளிகளும் ஒரே கோட்டில் அமைவன. (ii) அவற்றுள் மையக் கோட்டுச் சந்தி மற்றிரு மையங்களைச் சேர்க்கும் கோட்டை முச்சமக் கூறிடும் புள்ளிகளில் ஒன்றாகும்.

கொள்கை : ABC என்ற முக்கோணத்தில் S என்பது சுற்று வட்ட மையம். G என்பது மையக்கோட்டுச் சந்தி.

நிரூபிக்க : O எனும் குத்து மையமும் (i) SGயில் அமைகிறது.

(ii) $2\,SG = GO$ என

வரைதல் : SGஐ O எனும் புள்ளிக்கு $GO = 2\,SG$ எனும்படி நீட்டு. AG, பக்கம் BGஐ Xல் வெட்டட்டும் SXஐ ஒன்று சேர்; AOஐச் சேர்.

நிரூபணம் : X என்பது BCயின் நடுப்புள்ளி

$\therefore \quad SX \perp BC$

$$\frac{SG}{GO} = \frac{XG}{GA} = \frac{1}{2}$$

$\therefore \quad AO \parallel^{e} SX$; ஆனால் $SX \perp^{r} BC$

$\therefore$ AO $\perp$ BC

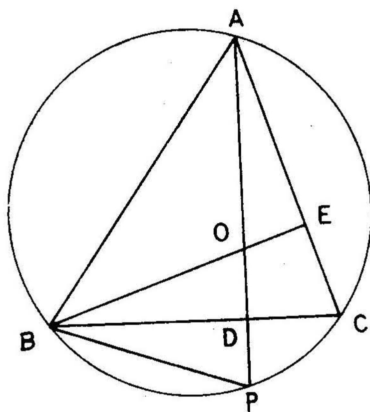
இதேபோல BO $\perp$ CA, CO $\perp$ AB எனக் காட்டலாம்.

$\therefore$ O என்பது $\triangle$ ABCயின் குத்துமையம்.

(i) அது SGயில் அமைகிறது.

(ii) 2SG = GO ஆனதால், G, SOஐ முச்சமக்கூறிடும் புள்ளிகளில் ஒன்று.

தேற்றம் 19: ABC என்ற முக்கோணத்தில் O என்பது குத்துமையம். AO, BCயை Dயிலும் வட்டம் ABCஐ Pயிலும் வெட்டினால் DO = DP.



வரைதல்: BO, ACஐ Eல் வெட்டட்டும்.
BPஐச் சேர்க்கவும்.

நிரூபணம்: ODC = OEC = 90°

$\therefore$ ODCE ஒரு வட்ட நாற்கரம்

$\therefore \angle BOD = \angle DCE$

$= \angle BCA$

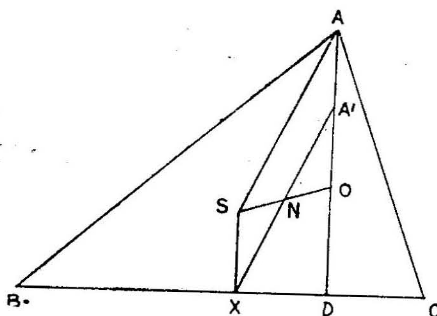
$= \angle BPA$

$\therefore$ BO = BP ஆனால் BD $\perp$ OP

$\therefore$ OD = DP

4. ஒன்பது புள்ளி வட்டம்

தேற்றம் 20: ஒரு முக்கோணத்தின் பக்கங்களின் மையப் புள்ளிகள் மூன்று, குத்துயரங்கள் பக்கங்களை வெட்டும் புள்ளிகள் மூன்று, குத்துமையத்தை முனைகளுடன் சேர்க்கும் கோடுகளின் மையப் புள்ளிகள் மூன்று என ஆக ஒன்பது புள்ளிகளும் ஒரே வட்டத்தில் அமைவனவாகும்.



கொள்கை : ABC என்பது முக்கோணம். AD, BE, CF எனும் குத்துயரங்கள் எதிர்ப்பக்கங்களை D, E, F எனும் புள்ளிகளில் வெட்டுகின்றன ; A', B', C' என்பவை AO, BO, CO என்பனவற்றின் மையப் புள்ளிகள் (O என்பது குத்துமையம்). X, Y, Z என்பவை பக்கங்கள் BC, CA, ABயின் மையப் புள்ளிகள்.

நிருபிக்க : X, Y, Z
D, E, F
A' B' C' எனும் 9 புள்ளிகள் ஒரே வட்டத்தில் அமைவன.

வரைதல் : S சுற்றுவட்டமையம் ஆகுக. SX, SA, XA′ SO என்பவற்றைச் சேர்க்கவும். SO, XA′, Nல் வெட்டுகின்றன.

நிருபணம் : (i) SX ∥ AA′ (⊥ BC)

SX = AA′ $(= \frac{1}{2}$ AO)

∴ S XA′A ஒரு இணைகரம்

∴ XA′ = S A = R [சுற்று வட்ட ஆரம்]

(ii) S X ∥ A′ O (⊥ BC)

S X = A′ O $(= \frac{1}{2}$ AO)

∴ S X O A′ ஒரு இணைகரம்

∴ XA; SO என்பவை ஒன்றையொன்று Nஇல் சமமாக வெட்டிக்கொள்கின்றன.

SN = NO ;

XN = NA′ = $\frac{1}{2}$ XA′ = $\frac{R}{2}$

(iii) $\underline{A' D X}$ = 90° ஆதலால் A′ Xஐ விட்டமாகவுள்ள வட்டம் X, D A′ வழிச் செல்வதாகும். இதன் மையம் A′ Xஇன் நடுப்புள்ளி N அதாவது SOவின் நடுப் புள்ளி. அதன் ஆரம் = $\frac{1}{2}$ XA′ = $\frac{R}{2}$; சுற்றுவட்ட ஆரத்தில் பாதி.

இதேபோல மற்ற முனைகள் B, Cஐ எடுத்துக்கொண்டால் இதே வட்டம் — அதாவது SOஇன் நடுப்புள்ளியை மையமாகவும் $\frac{R}{2}$ ஐ ஆரமாகவுமுடைய வட்டம் YEB′ ; ZFC′ ; வழியாகப் போகும் எனக் காட்டலாம்.

ஆகவே ஒன்பது புள்ளிகளும் ஒரே வட்டத்தில் அமைகின்றன.

குறிப்பு 1 : இந்த வட்டத்திற்கு ஒன்பது புள்ளி வட்டம் எனப் பெயராகும். இதன் மையம் SOவின் நடுப்புள்ளி N ஆகும். இது ஒன்பது புள்ளி வட்ட மையம் எனக் கூறப்படுகிறது. இதன் ஆரம் சுற்று வட்ட ஆரத்தில் பாதி ஆகும்.

குறிப்பு 2: $\triangle$ ABCயின் சுற்றுவட்ட மையம், குத்துமையம், மையக்கோட்டு சந்தி, 9 புள்ளி வட்ட மையம் S, O, G, N என்றால் அவையாவும் ஒரே கோட்டில் அமைகின்றன.

$SO = 6x$ என்றால் $SG = 2x$; $SN = 3x$

$$\therefore \quad GN = x \quad \therefore \frac{SG}{GN} = \frac{2}{1}; \quad \frac{SO}{ON} = \frac{6x}{3x} = \frac{2}{1}$$

$\therefore$ SNஐ Gயும் Oவும் உள்ளாகவும் புறம்பாகவும் ஒரே விகிதத்தில் பிரிக்கின்றன.

குறிப்பு 3: ABC என்ற முக்கோணத்தில் $\lfloor A = 90°$ ஆனால், BCயின் மையப்புள்ளி S, சுற்றுவட்டமையம். A குத்துச்சந்தி. SAயின் நடுப்புள்ளி N, 9 புள்ளி வட்டமையம்.

$$SN = \tfrac{1}{2} SA = \frac{R}{2} = R - \frac{R}{2}$$

இரண்டு வட்ட மையங்களிடையேயுள்ள தூரம், அவற்றின் ஆரங்களின் வித்தியாசம். ஆகவே ஒரு செங்கோண முக்கோணத்தில் சுற்றுவட்டமும், 9 புள்ளி வட்டமும் ஒன்றற்கொன்று உள் தொடு வட்டங்களாகும்.

பயிற்சி 15

1. ABC என்ற முக்கோணத்தில் O என்பது குத்து மையம் என்றால் ABC யின் 9 புள்ளி வட்டம் $\triangle$ OBC, $\triangle$ OCA $\triangle$ OAB என்ற முக்கோணங்களின் 9 புள்ளி வட்டமாகும்.

2. குத்து மையத்தைச் சுற்று வட்டத்தில் உள்ள ஏதேனும் ஒரு புள்ளியைச் சேர்க்கும் கோட்டை, முக்கோணத்தின் 9 புள்ளி வட்டம் இரு சமக்கூறிடும்.

3. ABC என்ற முக்கோணத்தின் பக்கங்களாகிய BC, CA, AB யின் நடுப் புள்ளிகள் D, E, F என்றால் $\triangle$ DEF இன் 9 புள்ளி வட்டம் $\triangle$ AEF ன் 9 புள்ளி வட்டத்தை EF இன் நடுப்புள்ளியில் தொடும் எனக்காட்டு.

4. $\triangle$ABC யின் சுற்று வட்டமையம் S. BC யில் அதன் நிழலுருவம் S′. AS′ இன்மையப்புள்ளி $\triangle$ ABC யின் 9 புள்ளி வட்டமையம் எனக்காட்டு.

5. முக்கோணம் ABC யின் சுற்று வட்டமையம் S; ஒன்பது புள்ளி வட்டமையம் N. SN இன் நடுப்புள்ளி, முக்கோணத்தின் பக்கங்களின் நடுப்புள்ளிகளாலான முக்கோணத்தின் ஒன்பது புள்ளி வட்டமையம் எனக்காட்டு.

தேற்றம் 21 ஒரு முக்கோணத்தின் சுற்று வட்டத்தில் ஒரு புள்ளியிலிருந்து அதன் பக்கங்களுக்கு வரையப்படும் குத்துக் கோடுகளின் அடிகள், ஒரு கோட்டமைவன ஆகும்.

கொள்கை: A B C என்பது ஒரு முக்கோணம். P என்பது ⊙ ABC யில் ஒரு புள்ளி; PX, PY, PZ என்பவை BC, CA, ABக்கு முறையே குத்துக் கோடுகள்.

நிருபிக்க: X, Y, Z எனும் புள்ளிகள் ஒரு கோட்டமையும் புள்ளிகளென.

வரைதல்: PX, வட்டம் ABC ஐ P′ ல் வெட்டட்டும் AP′ ஐச் சேர்க்க; PB ஐச் சேர்க்க; XZ, ஐச் சேர்க்க.

நிருபணம்: $\angle PXB = \angle PZB = 90^\circ$

∴ PBXZ ஒரு வட்ட நாற்கரம்.

∴ $\angle PXZ = \angle PBZ$ (ஒரே வட்டவில் தாங்கும் கோணங்கள்)

$= \angle PBA$

$= \angle PP'A$,, ,,

∴ $XZ \parallel AP'$

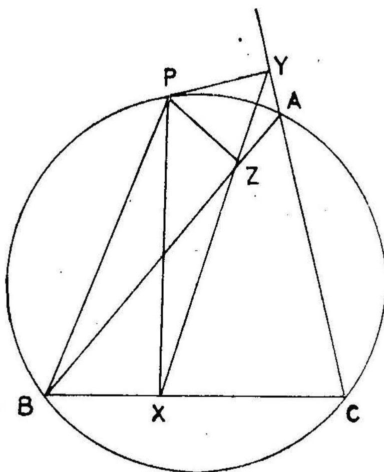
இதேபோல XY ∥ AP′ ஆனல் AP′ எனும் கோட்டிற்கு X வழி ஒரே ஒரு இணை கோடுதான் உள்ளது. ∴ XZ, XY என்பன இரண்டும் ஒரே கோடு. அதாவது X, Y, Z என்பவை ஒரே கோட்டமையும் புள்ளிகளாகும்.

குறிப்பு 1. இந்தக்கோடு Pயின் சிம்சன் கோடு (Simson line) அல்லது குத்தடிக்கோடு (Pedal line) எனப்படும்.

குறிப்பு 2. PP′ என்பது ABC என்ற முக்கோணத்தின் சுற்று வட்டத்தில் BCக்குக் குத்தாகவுள்ள நாண் ஆனல், Pயின் குத்தடிக்கோடு AP′க்கு இணையாக இருக்கும், எனத் தேற்றத்தில் நிறுவப்பட்டுள்ளது. அடிக்கடிப் பயன்படும் முக்கிய பண்பாகும் இது.

குறிப்பு 3. முக்கோணம் ABCயில் Aயின் சிம்சன் கோடு, A வழிச் செல்லும் குத்துயரக் கோடாகும். ஏனெனில் Aயிலிருந்து AC, ABக்கு வரையும் குத்தடிகள் Aயிலேயே விழுகின்றன. AD ⊥ BC; ஆகவே AD என்பதே Aயின் சிம்சன் கோடாகும். இதுபோல BE, CF, எனும் குத்துயரக் கோடுகள் B, C எனும் முனைகளின் ‘சிம்சன்’ கோடுகளாகும்.

தேற்றம் 21-(a) (மறுதலை) ஒரு புள்ளியிலிருந்து ஒரு முக்கோணத்தின் பக்கங்களுக்கு வரையப்படும் குத்துக் கோடுகளின் அடிகள் ஒரு கோட்டமைவனவாயின் புள்ளி முக்கோணத்தின் சுற்றுவட்டத்தில் அமையும்.



கொள்கை : ABC ஒரு முக்கோணம் PX, PY, PZ முறையே BC, CA, ABக் குத்துக் கோடுகள் X, Y, Z ஒரே கோட்டில் அமைகின்றன.

நிரூபிக்க : வட்டம் A B C யில் P அமைகிறதெனை.

நிரூபணம் : $\underline{PZA} + \underline{PYA} = 180^\circ$

$\therefore$ P Z A Y ஒரு வட்டநாற்கரம்

$\therefore$ $\underline{PAY} = \underline{PZY}$ (i)

$\underline{PXB} = \underline{PZB} = 90^\circ$

$\therefore$ P B X Z ஒரு வட்ட நாற்கரம்.

X Z Y ஒரே கோடாவதால் வெளிக்கோணம் $\underline{PZY}$ = உள் எதிர்க் கோணம் PBX (ii)

(i) லிருந்து $\therefore$ $\underline{PAY} = \underline{PBX} = \underline{PBC}$

$\therefore$ P B C A ஒரு வட்ட நாற்கரம்.

$\therefore$ வட்டம் A B C யில் P அமைகிறது.

குறிப்பு 3. PQ′, PR′ என்பவை CA, ABக்குக் குத்தாக வுள்ள நாண்களாயின் Pயின் சிம்சன் கோடு BQ′, CR′ என்பவற்றிற்கு இணையாக இருக்கும். தேற்றத்தில் PP′ என்பது BCக்குக் குத்தாகவுள்ள நாண் எனில், Pயின் சிம்சன் கோடு AP′க்கு இணை எனக் காட்டியுள்ளோம். இதைப் போலவே சிம்சன் கோடு BQ′, CR′க்கும் இணையாகும்.

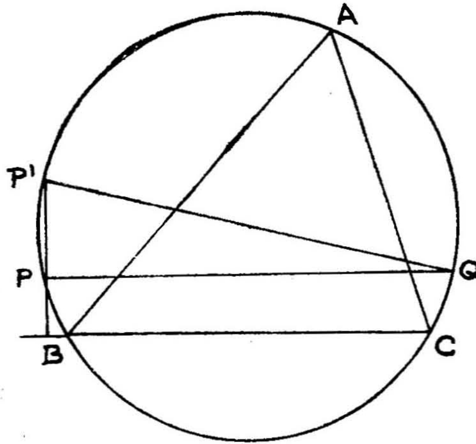
குறிப்பு 4 P, Q, என்பவை ⊙ A B Cயில் இரண்டு புள்ளிகளானல் அவற்றின் சிம்சன் கோடுகளுக்கிடையேயுள்ள கோணம், வில் PQ வட்டம் ABCயில் தாங்கும் கோணத்திற்குச் சமம். ஏனெனில் P P′, Q Q′, B Cக்குக் குத்தாகவுள்ள நாண்களாகுக.

$\therefore$ (i) வில் PQ = வில் P′ Q′ $\because$ (PP′ $\|^{l}$ QQ′)

(ii) P, Qயின் சிம்சன் கோடுகள் A P′, A Q′ க்கு இணை கோடுகள். $\therefore$ சிம்சன் கோடுகளிடையேயுள்ள கோணம் = P′ AQ′ = P′ Q′ எனும் வட்டவில் வட்டப் பரிதியில் தாங்கும் கோணம் = P Q எனும் வட்டவில் வட்டப் பரிதியில் தாங்கும் கோணம். (வில் PQ = வில் P′ Q′ ஆனதால்)

குறிப்பு 5 PQ விட்டமாயின் கோணம் = 90° ஆகையால் விட்டத்தின் முனைகளின் சிம்சன் கோடுகள் ஒன்றற்கொன்று குத்தாக இருக்கும்.

மாதிரி: PQ என்பது BCக்கு இணையாகவுள்ள ⊙ ABCயில் உள்ள நாண். Pயின் சிம்சன் கோடு AQக்குக் குத்தாக அமையும் எனக் காட்டு.



P P' என்பது B C க்குக் குத்தாகவுள்ள நாண் ஆகுக.

∵ (i) $P'PQ' = 90°$ (∴ PQ ∥ BC)

(ii) Pயின் சிம்சன் கோடு ∥ AP'.

(i) இலிருந்து P' Q வட்டத்தின் விட்டம்

∴ $\underline{|P'AQ}$ 90°

∴ A P' ⊥ A Q

(ii) இலிருந்து.

Pயின் சிம்சன் கோடு ⊥ A Q.

பயிற்சி 16

1. ஒரு புள்ளியிலிருந்து ஒரு முக்கோணத்தின் பக்கங்களுக்கு வரையப்படும் குத்துக்கோடுகளின் அடிகள் ஒரு கோட்டமைவன வானால், முக்கோணத்தின் சுற்றுவட்டத்தில் புள்ளி அமையும் என நிரூபி.

2. நாற்கரத்தில் நான்கு கோடுகளால் ஏற்படும், நான்கு முக்கோணங்களின் சுற்று வட்டங்கள் ஒரே புள்ளிவழிச் செல்லு பவை என நிறுவுக.

3. ABC என்ற முக்கோணத்தில் AD எனும் குத்துயரக் கோடு ⊙ ABCஐ Pயில் வெட்டுகிறது. Pயின் சிம்சன் கோடு, ⊙ ABCக்கு Aயில் வரையப்படும் தொடு கோட்டிற்கு இணை எனக் காட்டு.

4. Pயின் சிம்சன் கோடு A வழிச் செல்லும் விட்டத்திற்கு இணை எனில் AP ∥ BC எனக் காட்டு.

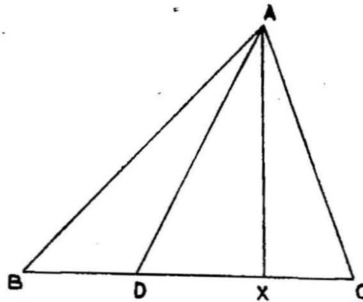
5. முக்கோணம் ABCயில், BCக்கு இணையாக P எனும் விட்டம் ⊙ ABCக்கு வரையப்படுகிறது. Pயின் சிம்சன் கோடு Aஐ குத்துமையத்துடன் சேர்க்கும் நடுப்புள்ளி வழிச் செல்கிறது எனக் காட்டு.

6. ABC என்ற முக்கோணத்தில் A A′ என்பது ⊙ ABCயின் விட்டம். A′ யின் சிம்சன் கோடு BC எனக் காட்டு.

தேற்றம் 22. ABC என்ற முக்கோணத்தில் $m\,BD = n\,DC$ எனும்படி BCயில் D ஒரு புள்ளியானால்

$$m\,AB^2 + n\,AC^2 = (m+n)\,AD^2 + m\,BD^2 + n\,DC^2$$

அல்லது $$m\,AB^2 + nC^2 = (m+n)\,AD^2 + \frac{mn}{(m+n)}\,BC^2.$$



கொள்கை : ABC என்ற முக்கோணத்தில் BCயில் D என்பது ஒரு புள்ளி ; $m\,BD = n\,DC$.

நிரூபிக்க :

$$(i)\ m\,AB^2 + n\,AC^2 = (m+n)\,AD^2 + m\,BD^2 + n\,DC^2$$

$$(ii)\ m\,AB^2 + n\,AC^2 = (m+n)\,AD^2 + \frac{mn}{(m+n)}\,BC^2$$

வரைதல் : BCக்கு AX எனும் குத்துக்கோடு வரைக. ADஐச் சேர்.

நிரூபணம் : ADB, ADC ஒன்று விரிகோணம் மற்றது குறுங் கோணம். ADB விரிகோணம் ஆகுக ; ∴ ADC குறுங் கோணம்.

∴ ABD என்ற முக்கோணத்தில்

$$AB^2 = AD^2 + BD^2 + 2BD \cdot DX \qquad (1)$$

ADC என்ற முக்கோணத்தில்

$$AC^2 = AD^2 + DC^2 - 2\,CD \cdot DX \qquad (2)$$

$$\therefore\ m\,AB^2 + n\,AC^2 = (m+n)\,AD^2 + m\,BD^2 + n\,DC^2 + 2\,DX\,(m\,BD - n\,DC).$$

ஆனால் $m\,BD - n\,DC = 0$.

$$(i)\ \therefore\ m\,AB^2 + n\,AC^2 = (m+n)\,AD^2 + m\,BD^2 + n\,DC^2$$

$$(ii)\ m\,BD = n\,DC$$

$$\therefore\ \frac{BD}{n} = \frac{DC}{m} = \frac{BD + DC}{n+m} = \frac{BC}{(m+n)}$$

$$\therefore\ m\,BD^2 = \frac{mn^2}{(m+n)^2}\,BC^2 \quad n\,DC^2 = \frac{nm^2\,BC^2}{(m+n)^2}$$

$$\therefore\ m\,BD^2 + n\,DC^2 = \frac{mn\,(m+n)}{(m+n)^2} \cdot BC^2$$

$$= \frac{mn}{(m+n)}\,BC^2.$$

$$(iii)\ m\,AB^2 + n\,AC^2 = (m+n)\,AD^2 + \frac{mn}{(m+n)}\,BC^2$$

குறிப்பு : BCயின் நடுப்புள்ளி D ஆனால்

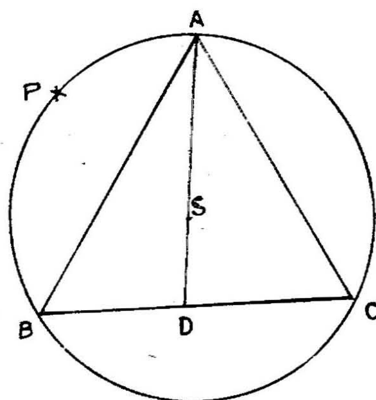
$$AB^2 + AC^2 = 2\,AD^2 + BD^2 + DC^2$$

அல்லது $AB^2 + AC^2 = 2\,AD^2 + \frac{BC^2}{4}$

மாதிரி: ABC ஒரு சமபக்க முக்கோணம் P என்பது வட்டம் ABCயில் ஒரு புள்ளி என்றால் (*i*) $PA^2 + PB^2 + PC^2 = 6\,R^2$

(*ii*) $PA^2 + PB^2 + PC^2 = 2\,BC^2$

எனக் காட்டு (R என்பது சுற்று வட்ட ஆரம்).



S என்பது சுற்றவட்ட மையம். சமபக்க முக்கோணத்திற்கு அதுவே மையக் கோட்டுச் சந்தி. $\therefore \dfrac{AS}{SD} = \dfrac{2}{1}$ ASஐ நீட்ட BCஐ Dல் சந்திக்கிறது. $\therefore \dfrac{BD}{DC} = 1.$

$$\therefore \quad PB^2 + PC^2 = 2\,PD^2 + BD^2 + DC^2 \qquad (1)$$

$$2\,PD^2 + PA^2 = 3\,PS^2 + 2\,SD^2 + SA^2 \qquad (2)$$

$\triangle$ SBCயில் $BD : DC = 1 : 1$

$$\therefore \quad 2\,SD^2 + BD^2 + DC^2 = SB^2 + SC^2 \qquad (3)$$

மூன்று சமன்பாடுகளின் இருபக்கங்களையும் கூட்டிச் சுருக்க
$PA^2 + PB^2 + PC^2 = 3\,PS^2 + SA^2 + SB^2 + SC^2$

ஆனால் $SA = SB = SC = SP = R$

$\therefore \quad PA^2 + PB^2 + PC^2 = 6\,R^2$

(*ii*) SBD என்ற முக்கோணத்தில் $SDB = 90°$

$BSD = 60°$ $\qquad \therefore \dfrac{SB}{BD} = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$ $\qquad SB = R$

$\therefore \quad BD = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\,R \qquad \therefore \quad BC = \sqrt{3}\,R \quad \therefore \quad R = \dfrac{BC}{\sqrt{3}}$

$$\therefore \quad PA^2 + PB^2 + PC^2 = 6 \cdot \frac{BC^2}{3} = 2\,BC^2$$

பயிற்சி 17

1. ABC என்பது ஒரு சமபக்க முக்கோணம் P என்பது ○ ABCயில் ஒரு புள்ளி எனில் $PA^2 + PB^2 + PC^2 = 6R^2$ எனக் காட்டு.

2. ABC என்ற முக்கோணத்தில் G என்பது மையக்கோட்டு மையம் எனில்

(i) $AB^2 + BC^2 + CA^2 = 3(GA^2 + GB^2 + GC^2)$

(ii) $3(AB^2 + BC^2 + CA^2) = 4(AD^2 + BE^2 + CF^2)$
(AD, BE, CE என்பவை மையக் கோடுகள்.)

(iii) $PA^2 + PB^2 + PC^2 = 3PG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2$
(P என்பது ஏதேனும் ஒரு புள்ளி.)

3. ABC என்ற முக்கோணத்தின் தளத்தில் P என்பது

(i) $PA^2 + PB^2 + PC^2 = K$ என்றால் Pயின் நியமப்பாதை என்ன ?

(ii) $PA^2 + PB^2 + PC^2$ என்பது மிகவும் குறைவாக இருக்க Pயின் நிலை என்ன ?

4. ABC என்ற முக்கோணத்தில் I உள்வட்ட மையம்; P என்பது ஏதேனும் ஒரு புள்ளி எனில்

$$a \cdot PA^2 + b \cdot PB^2 + c \cdot PC^2 = (a+b+c)\,PI^2 + a \cdot AI^2 + b \cdot BI^2 + c \cdot CI^2$$

எனக் காட்டு.

5. ABCD ஒரு நாற்கரம். மூலைக் கோடுகளின் நடுப்புள்ளிகளைச் சேர்க்கும் கோட்டின் நடுப்புள்ளி EP ஏதேனும் புள்ளியானால் $PA^2 + PB^2 + PC^2 + PD^2 = EA^2 + EB^2 + EC^2 + ED^2 + 4EP^2$ எனக் காட்டு.

பிழைதிருத்தம்

[தயவு செய்து அந்தந்தப் பக்கங்களில் பிழைகளை முதலில் திருத்திக்கொள்ளவும்.]

பக்கம்	வரி	பிழை	திருத்தம்
1	8	$f(\wedge)$	$f(r)$
10	8, 9, 10	R	K
11		K வருமிடங்களில் எனத் திருத்தவும்	k
13		,,	,,
13	3	$+(b+d+f)k^3$	$=(b+d+f)\ k^3$
	4	$(b+d+b)$	$(b+d+f)$
	கணக்கு 3	mal	mab
	,,	qal	qab
14	கணக்கு 10	$(m+n-e)$	$(m+n-l)$
15	8	$\sqrt{ae}$	$\sqrt{ab}$
17	2	$24\sqrt{2}$	$12\sqrt{2}$
	3	$-8\sqrt{6}$	$+8\sqrt{6}$

வரி 9லிருந்து, கீழ்க்கண்டவாறு திருத்துக.

$$c+x+\sqrt{b} = c+\sqrt{d}$$
$$\therefore\ x+\sqrt{b} = \sqrt{d}$$
$$\therefore\ x^2+b+2x\sqrt{b} = d$$
$$\therefore\ \sqrt{b} = \frac{d-b-x^2}{2x}$$

பக்கம்	வரி	பிழை	திருத்தம்
18	வரி 12	$\sqrt{41}+6\sqrt{32}$	$\sqrt{41+6\sqrt{32}}$
	17	$\sqrt{a}-\sqrt{b}$	$\sqrt{a}+\sqrt{b}$
33	19	$-$	$=$

பக்கம்	வரி	பிழை	திருத்தம்
24	12	a^0 இன் பொருள்	a^0 இன் பொருள் :
	14	$+$	$\therefore$
	15	1 அக	1 ஆக
25	10	$\sqrt[6]{a p}$	$\sqrt[q]{a^p}$
26	5	$m = -R ; R, n$	$m = -P, P, n$
30	5	எண்னை	எண்ணை
	6	K	N
31 கணக்கு	4	$(v) \log \sqrt{_2 x} = 4$ (மேலே x)	$\log_{\sqrt{2}} x$
33	1	கூறு	கூற
	7	1 மடங்கு	P மடங்கு
34	6	glo	log
41	19	1 · 9198	$\bar{1}$·9198
43	13	1a;	19;
44 கணக்கு	9	$\bar{2}^5 \times \bar{3}^4$	$2^{-5} \times 3^{-4}$
45	10	$\left(x + \frac{2a}{b}\right)^2$	$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$
47	20	$—^2$	—
48	3	r	p
	4	$r\,V_n$	$p\,V_n$
	6	$r\,V_4$	$p\,V_4$
	7	$r(\alpha^4 + \beta^4)$	$p(\alpha^4 + \beta^4)$
48	10	$(r^2 - 2q^2$	$(p - 2q)^2$
	17	$5rq^2$	$5pq^2$
	18	rV_n	pV_n
	19	r	p
49	9	$\times$	$+$
50	28	$-\frac{b}{x}$	$-\frac{b}{a}$
51 கணக்கு	1	$\beta^2 + d,$	$\beta^2 + a$
52	1	r	p
கணக்கு	5	‘r’ ‘g’	p, q
53 கணக்கு	3	$- / 1cx$	$- 11\,cx$
54	20	$\sqrt{-1} \times 8$	$\sqrt{-1} \times 8.$
	31	$\sqrt{1}$	$\sqrt{7}$
55	9	$-K^2$	$-k^2$
	12	$-b - \sqrt{-1}\,k$	$\frac{-b - \sqrt{-1}\,k}{2a}$

பிழைதிருத்தம்

பக்கம்	வரி	பிழை	திருத்தம்
	12	இணக்	இஷேக்
56	8	Discrimunant	Discriminant
	11	முலங்கள்	மூலங்கள்
58	20	Quadralic	Quadratic
59	14	$(a-a)$	$(x-a)$
60	9	$(xy+1)$	$x(y+1)$
63	13	தமிழிலிக்கிய	தமிழிலக்கிய
64	23	nr	n
65		γ வருமிடங்களில் r எனத் திருத்தவும்	
66	4	$n(n-1)(n-2)$	$n(n-1)(n-2)\ldots$
71		γ வருமிடங்களில் r எனத் திருத்தவும்	
73	5	intigu	integer
	15	$5e_1$	$5c_1$
	17	$5e_3$	$5c_3$
74	6	$nCrx^{n-r}$	$nCnx^{n-r}y^r$
	22	$nCmx^{n-r}y^r$	$nCrx^{n-r}y^r$
	24	தொகுதிதறி	தொகுத்தறி
78	2	$+$	$\times$
	10	$\lfloor 2^n$	$\lfloor 2n$
84	4, 5, 6, 7	$\overline{1}$	⊤
	17	$=3\cdot2^n$	$+3\cdot2^n$
88	8	γ	r
	11	r^2	p^2
		9^2	q^2
94	5	Hormonic	Harmonic
	14	rவது qவது	pவது qவது
	15	$ca(r-r)$	$ca(r-p)$
	16	$(r-q)$	$(p-q)$
	18	$\therefore$ rவது	$\therefore$ pவது
		$\frac{1}{x+rd}$	$\frac{1}{x+pd}$
	19	$x+rd$	$x+pd$
95	3	$(a-e)$	$(a-c)$
		$(r-r)$	$(r-p)$
	5	$(r-r)$	$(r-p)$

பக்கம்		வரி	பிழை	திருத்தம்
97	கணக்கு	7	"மூன்று எண்களின் கூடுதல் — $\frac{1}{5}$; அவற்றின் பெருக்கற்பலன் — $\frac{4}{135}$" என வாசிக்கவும்.	
	கணக்கு	8	உறுப்பு r	உறுப்பு p
99		11	rவது	pவது
		13	e^{r-q}	c^{p-q}
100		1	SP	G·P
		5	$ar?$	ar^2
101	கணக்கு	16	$\overline{1}$	T
102, 103			S இருக்குமிடங்களில் G எனத் திருத்தவும்.	
104		3	Lt. $\frac{1}{n+a\,2n} - 10$	Lt. $_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} \to 0$
		18	Science	Series
		22	$_r S_n$	$r \cdot S_n$
			$(a+\overline{n-1}d)^2 r$	$(a+\overline{n-1}d)r^n$
105		1	$(a+\overline{n-1}d)r^2$	$(a+\overline{n-1}d)r^n$
		2	$-(a+\overline{n-1}d)$	$-(a+\overline{n-1}d)r^n$
		3	$=\frac{(a+b-1a)r^3}{1-r}$	$-\frac{(a+\overline{-n1}a)r^n}{1-r}$
112		17	$(e-c')$	$(c-c^1)$
		21	x^2-5x+9	x^2-5x+3
135		15	$=$	$\equiv$

கலைச்சொற்கள்

A

Altitude	— குத்துயரம், குத்துயரக் கோடு
Angle	— கோணம்
Acute	— குறுங்கோணம்
Complementary	— நிரப்பு கோணம்
Obtuse	— விரிகோணம்
Right	— செங்கோணம்
Arithmetic progression	— கூட்டுத்தொடர்
Arithmetic mean	— கூட்டிடை எண்

B

Base of a logarithms	— இலாகரிதத்தின் அடியெண்
Binomial Theorem	— ஈருறுப்புக் கோவைத் தேற்றம்
Coefficients	— ஈருறுப்புக் குணகம்
Bisector - Internal	— உள்சமவெட்டி
External	— வெளிச்சமவெட்டி

C

Centre, Circum	— சுற்றுவட்ட மையம்
Ex	— வெளித்தொடுவட்ட மையம்
In	— உள்தொடுவட்ட மையம்
Ortho	— குத்துமையம்
9 Point	— 9 புள்ளி வட்ட மையம்
Centroid	— மையக்கோட்டுச் சந்தி
Collinear	— ஒருகோட்டு மையம்
Combination	— தொகுதிச் சேர்க்கை
Complex number	— கலப்பெண்
Compound angles	— கோணச்சேர்க்கை
Concurrency	— ஒருபுள்ளிவழிச் செல்லுதல்

D

Decimal recurring	— மடங்குத் தசம பின்னம்
Discriminant	— தன்மைகாட்டி

E

Equation	— சமன்பாடு
Expression	— கோவை

F

Factorial	— காரணீயம்
Function	— சார்பலன்

G

Geometry	— ஜியோமிதி, வரைகணிதம்
,, Analytical	— இயல்முறை ,,
,, Cartesian	— கார்டீசியமுறை ,,

H

Homogeneous functions	— ஓரினக் கோவை

I

Indices	— அடுக்குகள்
Infinite	— முடிவிலா

L

Limit	— அணுகும் எண்
Logarithm	— இலாகரிதம்
,, Common	— நடைமுறை இலாகரிதம்
,, Anti	— எதிர் இலாகரிதம்

M

Mean, Arithmetic	— கூட்டிடை எண்
Geometric	— பெருக்கிடை எண்
Harmonic	— ஆர்மானிக்கு இடை எண்
Median	— மையக்கோடு

N

Number, Complex	—	கலப்பெண்
Imaginary	—	பொய்யெண்
Irrational	—	விகிதமுரு எண்
Negative	—	எதிரெண்
Positive	—	நேரெண்
Rational	—	விகிதமுறு எண்
Real	—	மெய்யெண்

Q

Quadratic Equation	—	இருபடிச் சமன்பாடு
,, Expression	—	இருபடிக் கோவை
Quadrilateral Cyclic	—	வட்ட நாற்கரம்

R

Ratio	—	விகிதம்
Reciprocal	—	தலைகீழ் பின்னம்

S

Series	—	எண்தொடர்
,, Infinite	—	முடிவிலாத் தொடர்
Simpson Line	—	சிம்சன் கோடு

T

Term	—	உறுப்பு
Theorem	—	தேற்றம்
Trisection - Point of	—	முச்சமக்கூறிடும் புள்ளி

V

Variable	—	மாறி
Vertex	—	முனை

